

좌표계의 회전과 코리올리 효과

이형근 (hyknlee@kau.ac.kr)

한국항공대학교 항공전자및정보통신공학부

위치, 속도, 그리고 자세 정보는 통틀어 항법정보라 지칭되며 이들은 전파센서, 영상센서, 혹은 관성센서 등 다양한 센서들의 조합에 의하여 획득될 수 있다. 항법정보의 획득에 있어서 특히 관성센서는 다양한 센서들의 조합에 있어서 가장 중요한 역할을 수행하는데 이는 관성센서가 다른 센서들과는 달리 주변의 조명 환경, 전파 환경, 그리고 고의적인 외란에 강인한 특성을 지니며, 이동체의 빠른 운동을 세밀하게 수치화하여 표현할 수 있기 때문이다. 관성센서의 출력을 정확하게 다루기 위해 명확한 이해가 요구되는 코리올리 효과에 대하여 살펴보고자 한다. 코리올리 효과는 이동체의 운동을 회전하는 좌표계에서 관측할 경우 발생하는 특이한 현상에 해당되며 관성센서를 다루기 위한 준비 과정에서 많은 어려움이 수반되는 부분으로 이해된다.

1. 좌표계 회전에 의한 좌표변환 행렬의 미분

두 개의 서로 다른 좌표계에 대하여 (막대) 벡터를 좌표값으로 수치화하여 추출한 경우 동일한 벡터에 대한 두 좌표값 사이의 관계는 좌표변환행렬을 활용하여 표현할 수 있다 (그림 1 참조). 이를 수식으로 정리하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$R^i = C_m^i R^m, \quad R^m = C_i^m R^i \quad (1)$$

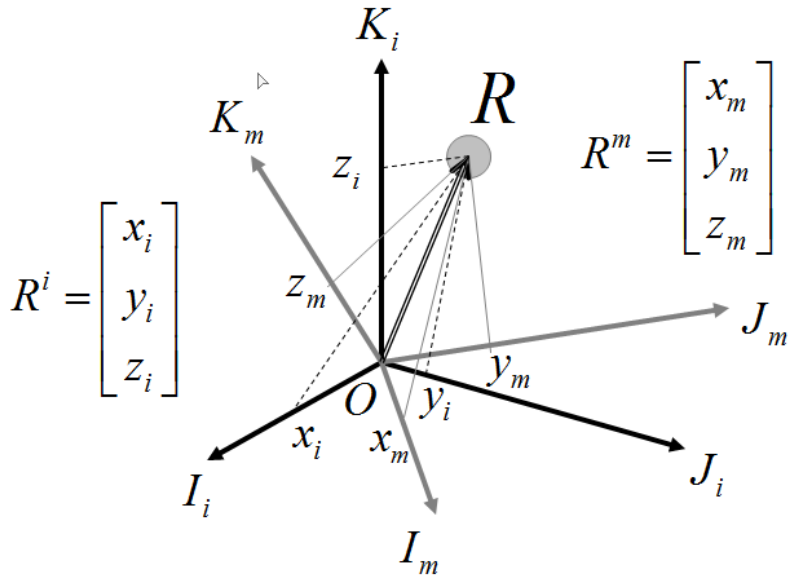


그림 1. 기하학적 개념의 (막대) 벡터 R 과 수치적인 개념의 좌표값 R^i 그리고 R^m 사이의 관계

여기서

$R^i = [x_i \ y_i \ z_i]^T$: i -좌표계 (기준 좌표계)에 대한 벡터 R 의 좌표값:

$R^m = [x_m \ y_m \ z_m]^T$: m -좌표계 (회전 좌표계)에 대한 벡터 R 의 좌표값:

지금부터는 좌표변환행렬의 미분치가 회전 좌표계의 각속도와 어떠한 관계를 가지는지를 살펴보고자 한다. 이를 위하여 좌표변환행렬의 미분치를 미소시간에 대한 좌표변환행렬의 미소 변화량으로 다음과 같이 표현한다.

$$\dot{C}_m^i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta C_m^i}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{C_m^i(t + \Delta t) - C_m^i(t)}{\Delta t}. \quad (2)$$

여기서 i -좌표계는 모든 좌표계의 기준인 관성좌표계를 나타내므로 시간의 변화에 영향을

받지 않는다. 즉, 어떠한 임의의 시점 t 와 경과시간 Δt 에 대하여 다음의 관계를 항상 만족한다.

$$C_{i(t)}^{i(t+\Delta t)} = I_{3 \times 3} \quad (3)$$

여기서 $i(t)$ 와 $i(t+\Delta t)$ 는 각기 다른 시점 t 와 시점 $t+\Delta t$ 에서 관측한 관성좌표계를 각각 나타낸다. 이로 인하여, 좌표변환행렬 $C_m^i(t+\Delta t)$ 의 시간에 따른 모든 변화는 회전하는 m -좌표계에 기인하는 것으로 해석할 수 있으며, 이를 수식으로 표현하면 다음과 같이 정리된다.

$$C_m^i(t) = C_{m(t)}^i, \quad C_m^i(t+\Delta t) = C_{m(t+\Delta t)}^i \quad (4)$$

따라서, 서로 다른 시점에 해당되는 위 좌표변환행렬들은 다음의 관계를 만족하게 된다.

$$\begin{aligned} C_m^i(t+\Delta t) &= C_{m(t+\Delta t)}^i \\ &= C_{m(t)}^i C_{m(t+\Delta t)}^{m(t)} \\ &= C_m^i(t) C_{m(t+\Delta t)}^{m(t)} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 m -좌표계는, i -좌표계와는 달리, 시간의 변화에 따라 회전하므로 식 (5)에 나타난 $m(t)$ 와 $m(t+\Delta t)$ 는 엄밀하게 다른 자세를 나타낸다. 이를 쉽게 연상하는 방법으로 카메라로 회전운동을 하고 있는 m -좌표계를 각기 다른 시점 t 와 시점 $t+\Delta t$ 에서 촬영할 경우 그림 2에 나타난 바와 같이 두 좌표계의 x, y, z 축 (막대) 기저벡터 I, J , 그리고 K 의 방향이 다르게 나타나는 경우를 생각하면 되겠다. 이와 같이 서로 자세가 다른 $m(t)$ -좌표계

와 $m(t + \Delta t)$ -좌표계 사이의 좌표변환행렬도 일반적인 원리를 활용하여 세 개의 연속적인 단위 좌표변환행렬의 곱으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$C_{m(t)}^{m(t+\Delta t)} = C(\delta\phi)C(\delta\theta)C(\delta\psi), \quad C_{m(t+\Delta t)}^{m(t)} = C(-\delta\psi)C(-\delta\theta)C(-\delta\phi) \quad (6)$$

여기서 $C(\delta\psi)$ 는 $m(t)$ -좌표계의 z-축을 기준으로 미소 요(yaw) 각 $\delta\psi$ 만큼의 변환을 나타내며 이에 의하여 $m(t)$ -좌표계는 $m(t)'$ -좌표계로 변화되며, $C(\delta\theta)$ 는 $m(t)'$ -좌표계의 y-축을 기준으로 미소 피치(pitch) 각 $\delta\theta$ 만큼의 변환을 나타내며 이에 의하여 $m(t)'$ -좌표계는 $m(t)''$ -좌표계로 변화되고, 마지막으로 $C(\delta\phi)$ 는 $m(t)''$ -좌표계의 x-축을 기준으로 미소 롤(roll) 각 $\delta\phi$ 만큼의 변환을 나타내며 이에 의하여 $m(t)''$ -좌표계는 $m(t + \Delta t)$ -좌표계로 변화된다.

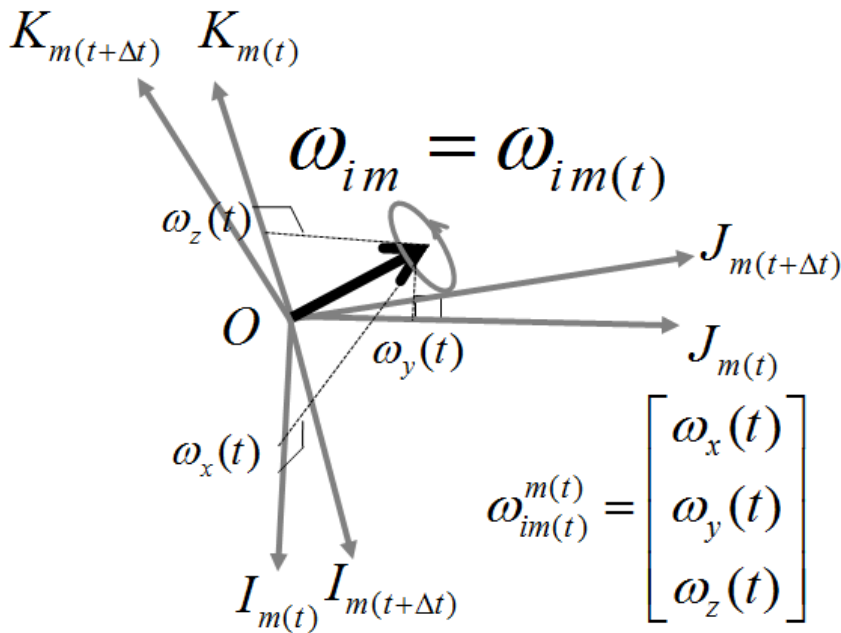


그림 2. 막대 회전벡터에 의한 기저벡터 방향의 변화 및 막대 회전벡터의 좌표값

앞서 설명된 세 가지 단위 좌표변환행렬들 중 $C(\delta\psi)$ 는 $\delta\psi$ 가 아주 작다고 가정할 경우 다음과 같이 근사화 될 수 있다.

$$C(\delta\psi) = \begin{bmatrix} \cos \delta\psi & \sin \delta\psi & 0 \\ -\sin \delta\psi & \cos \delta\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & \delta\psi & 0 \\ -\delta\psi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

유사한 방법으로 나머지 단위 좌표변환행렬들도 각각 다음과 같이 근사화 될 수 있다.

$$C(\delta\phi) \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \delta\phi \\ 0 & -\delta\phi & 1 \end{bmatrix}, \quad C(\delta\theta) \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\delta\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \delta\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

회전하는 이동체의 x , y , 그리고 z 축은 통상적으로 이동체의 전방, 우측, 그리고 아래쪽 방향을 각각 나타내며, 이들 각 축에 대한 미소 회전각들은 3차원 각속도 벡터에 미소 시간을 곱하면 얻을 수 있다. 즉, 미소 각도 변화량은 각속도에 미소 시간을 곱하여 얻을 수 있음을 의미하며, 이를 수식으로 표현하면 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{bmatrix} \delta\phi \\ \delta\theta \\ \delta\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \Delta t = \omega_{im}^m \Delta t \quad (9)$$

여기서 ω_{im}^m 은 그림 2에 나타난 바와 같이 i -좌표계에 대한 m -좌표계의 회전 각속도 벡터를 (아래 첨자 부분) m -좌표계에 대한 좌표값으로 (위 첨자 부분) 표현한 것이다.

또한, 미소 회전각의 고차 항을 무시하여 식 (7)과 식 (8)을 활용하면 다음과 같은 관계가 만족됨을 알 수 있다.

$$C_{m(t+\Delta t)}^{m(t)} = C(-\delta\psi)C(-\delta\theta)C(-\delta\phi) = I_{3 \times 3} + \delta C, \quad (10)$$

여기서

$$\delta C = \begin{bmatrix} 0 & -\delta\psi & \delta\theta \\ \delta\psi & 0 & -\delta\phi \\ -\delta\theta & \delta\phi & 0 \end{bmatrix} = \langle \omega_{im}^m \rangle \Delta t, \quad (11)$$

식 (11)에서 $\langle \omega_{im}^m \rangle$ 는 (3×1) -차원 (막대) 회전 각속도 벡터의 좌표값 ω_{im}^m 을 활용하여 구성된 (3×3) -차원 왜대칭행렬(skew-symmetric matrix)을 나타낸다. 참고로 왜대칭행렬은 벡터 회전의 표현에 자주 나타나며 또한 두 벡터의 좌표값 사이의 외적을 다음과 같이 계산하는데 유용하게 활용된다.

$$\langle x^m \rangle y^m = x^m \times y^m \quad (12)$$

왜대칭행렬 연산자 $\langle \bullet \rangle$ 는 이외에도 임의의 (3×3) -차원 좌표변환행렬 C 와 (3×1) -차원 좌표값 a , b , 그리고 d 에 대하여 다음의 관계식들을 만족하는데, 이들은 각 벡터를 원소별로 나열하고 좌우변을 비교해 보면 쉽게 증명이 가능하다.

$$\langle Ca \rangle = C \langle a \rangle C^{-1} = C \langle a \rangle C^T$$

$$\langle a \rangle b = -\langle b \rangle a$$

$$\begin{aligned}
\langle a \rangle^T &= -\langle a \rangle \\
\langle a \rangle a &= O_{3 \times 1} & \text{or } a \times a &= O_{3 \times 1} \\
\langle \langle a \rangle b \rangle d &= (a^T d)b - (b^T d)a & \text{or } (a \times b) \times d &= (a^T d)b - (b^T d)a
\end{aligned} \tag{13}$$

식 (13)에 나타난 여러 가지 관계식들은 위치, 속도, 그리고 자세가 결합된 다양한 항법식의 모델링, 설계, 그리고 해석에 유용하게 활용될 수 있다.

식 (4), (5), (10), 그리고 (11)에 의하면 다음의 관계가 성립한다.

$$\frac{1}{\Delta t} [C_m^i(t + \Delta t) - C_m^i(t)] = \frac{1}{\Delta t} C_m^i \langle \omega_{im}^m \rangle \Delta t = C_m^i \langle \omega_{im}^m \rangle \tag{14}$$

따라서, 식 (14)을 식 (2)에 대입하면 최종적으로 임의 시점 좌표변환행렬 C_m^i 의 미분치는 다음과 같이 정리되어 얻어진다.

$$\dot{C}_m^i = C_m^i \langle \omega_{im}^m \rangle = C_m^i (\omega_{im}^m \times) \tag{15}$$

2. 코리올리 효과

지금부터는 회전하는 좌표계를 기준으로 한 좌표값의 미분에 대하여 살펴보고자 한다. 이를 위하여 식 (1)에 나타난 서로 다른 좌표계에 대한 좌표값들 사이의 관계식을 활용하는 것이 편리하다. 먼저, 몇 개의 단위함수의 곱으로 형성된 복합함수의 미분은 각 단위함수를 미분하여 중첩하는 규칙을 활용하여 식 (1)의 좌우변 미분치를 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\dot{R}^i = \dot{C}_m^i R^m + C_m^i \dot{R}^m \quad (16)$$

여기서

$$\dot{R}^i = [\dot{x}_i \quad \dot{y}_i \quad \dot{z}_i]^T : i\text{-좌표계 (기준 좌표계)에 대한 벡터 } R \text{의 좌표값:}$$

$$\dot{R}^m = [\dot{x}_m \quad \dot{y}_m \quad \dot{z}_m]^T : m\text{-좌표계 (회전 좌표계)에 대한 벡터 } R \text{의 좌표값:}$$

(17)

식 (17)에 나타난 바와 같이 좌표값 변화율 \dot{R}^i 은 R^i 의 각 구성 원소를 미분한 것으로서, 이의 의미를 보다 상세하게 해석해 보면 i -좌표계에 부착된 (발을 디딘) 관찰자가 (막대) 벡터 R 의 변화율을 관측한 다음 이를 i -좌표계에 대한 좌표값으로 표현한 것임을 알 수 있다. 유사하게 \dot{R}^m 은 m -좌표계에 부착된 관찰자가 (막대) 벡터 R 의 변화율을 관측한 다음 이를 m -좌표계에 대한 좌표값으로 표현한 것이다. 이와 같은 해석을 식으로 표현하면 다음과 같이 정리된다.

$$\dot{R}^i = (p_i R)^i, \quad \dot{R}^m = (p_m R)^m \quad (18)$$

여기서 p_i 와 p_m 은 미분연산자에 해당되며 각기 다른 아래 첨자는 미분 혹은 위치 변화의 관측에 있어서 관찰자가 부착된 (발을 디딘) 좌표계를 나타낸다. 따라서, 좌표값 변화율 표

현에는 두 좌표계가 관여하게 되는데, 그 중 아래첨자로 표현된 좌표계는 관찰자가 어떤 좌표계에 발을 디디고 운동을 관측한 것인지를 나타면서, 괄호 밖의 위 첨자는 관측에 의하여 발생된 변화율 (막대) 벡터를 어떤 좌표계에 대하여 정사영 한 후 좌표값으로 읽었는지를 나타낸다.

여기서, 변화율 (막대) 벡터는 연속적인 두 시점에 연관된 (막대) 벡터들 중에서 앞선 시점에 해당되는 (막대) 벡터의 끝점으로부터 뒤진 시점의 (막대) 벡터로 화살표를 그린 다음 화살표의 시작점을 관찰자가 발을 디딘 좌표계의 원점으로 평행 이동한 것을 의미한다.

식 (14)와 식 (18)을 식 (16)에 대입하면 다음의 관계식이 얻어진다.

$$(p_i R)^i = C_m^i \langle \omega_{im}^m \rangle R^m + C_m^i (p_m R)^m \quad (19)$$

식 (13)에 의하여 식 (19)는 다음과 같이 전개된다.

$$\begin{aligned} (p_i R)^i &= \langle \omega_{im}^i \rangle C_m^i R^m + C_m^i (p_m R)^m \\ &= \langle \omega_{im}^i \rangle R^i + (p_m R)^i \\ &= (p_m R + \omega_{im} \times R)^i \end{aligned} \quad (20)$$

식 (20)은 변화율 (막대) 벡터의 좌표값들 사이의 관계를 나타내며, 여기서 좌표값을 표현하기 위해 활용된 i -좌표계는 괄호 밖 위 첨자로 표시되어 있다. 따라서, 식 (20) 좌우변의 괄호 안에 표시된 내용들은 변화율 (막대) 벡터를 나타낸다. 의미 구분을 위하여 다시 설명하면, (막대) 벡터는 시작점과 끝점이 기하학적으로 명확하게 표시된 공간 상의 화살표에 해당되며, 좌표값은 특정한 좌표계를 선택하여 (막대) 벡터를 해당 좌표계의 각 기저 벡터로 정

사영하여 길이를 측정한 후 기록한 수치에 해당된다. 따라서, (막대) 벡터는 좌표값보다 더 근본적인 개념이다. 즉, 한 개의 동일한 (막대) 벡터는 좌표계의 선택에 따라 수도 없이 다양한 좌표값으로 표시될 수 있다. 이에 대한 좋은 예는 길이가 r 인 임의의 (막대) 벡터 R 에 대하여 다양한 좌표계에 기반한 좌표값들이 주어진 경우 만족되는 다음의 관계식을 들 수 있다.

$$r = \|R^i\| = \|R^m\| = \|R^n\| \quad (21)$$

따라서, 좌표값들 사이의 관계식을 나타내는 식 (20)으로부터 보다 더 근본적인 (막대) 벡터 사이의 관계식을 도출하면 단순히 위 첨자를 제거하고 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$p_i R = [p_m + (\omega_{im} \times)] R \quad (22)$$

또한, 식 (22)에서 (막대) 벡터 R 은 설명을 위하여 임의로 선정된 것이므로 식 (22)의 좌우 변에서 미분의 대상이 되는 R 의 표기를 제거하면 최종적으로 가장 근본적인 연산자 사이의 관계식이 다음과 같이 얻어진다.

$$p_i = p_m + (\omega_{im} \times) \quad (23)$$

따라서, 근원적인 개념은 동일하지만 표현 대상이 좌표값, (막대) 벡터, 그리고 연산자 등으로 달라짐에 따라 코리올리 효과를 적용하는 관계식은 식 (20), 식 (22), 그리고 식 (23)과 같이 엄밀히 달라짐을 알 수 있다. 이동체 운동의 해석을 위하여 이와 같이 엄밀한 구분을 적용하는 것은 정확한 결과를 도출함에 있어서 대단히 중요한 역할을 수행한다.

코리올리 효과를 이해하는 간단한 예로서 다음과 같은 경우를 들 수 있다. 실내에 큰 회전판이 설치되어 있으며, 천장에서는 고정된 화살표가 그려져 있는 상황을 가정한다. 관찰자는 회전판 중심에 발을 디디고 고개를 들어 천장에 그려진 화살표를 응시하고 있다. 이 경우, 회전판을 정지시킨 후 관측자가 천장의 화살표를 응시하면, 화살표가 움직이지 않는 것을 관측할 수 있다. 따라서, 서로 다른 두 시점에서 관측한 화살표의 끝점을 선으로 연결시켜도 선의 길이는 영(zero)이 되므로, 길이가 영인 (막대) 벡터가 화살표의 변화 운동에 해당되며 이는 식 (22)의 좌변에 해당된다.

반면, 회전판을 오른쪽으로 회전시킨 후 관측자가 상당 시간 천장의 화살표를 응시하면, 천장의 화살표가 왼쪽으로 움직이는 것 같은 착시 현상이 발생한다. 따라서, 관찰자 관점에서 서로 다른 두 시점에서 관측한 화살표의 끝점을 선으로 연결시키면 길이가 영이 아닌 (막대) 벡터가 생성되며 이는 식 (22) 우변의 첫번째 항이 된다.

동일한 운동에 의하여 발생한 관측된 (막대) 벡터에 대해서는 식 (22)의 좌변과 우변이 같아야 하지만 식 (22)의 좌변은 영벡터에 해당된다. 따라서, 우변 또한 영벡터가 되어야 하나 실질적으로 관측된 우변의 첫번째 항은 영벡터가 아니므로 두번째 항은 첫번째항과 길이는 동일하고 방향이 반대인 (막대) 벡터가 되어야 함을 알 수 있다. 이때, 실질적으로 관측되지는 않았지만 관찰자가 발을 디딘 좌표계가 회전함으로 인하여 생성된 식 (22)의 두번째 항은 코리올리 효과에 해당된다.

3. 결 론

회전하는 좌표계를 활용할 경우 명확하게 고려해야 할 두 가지 중요한 개념들을 상세히 살

펴보았다. 그 중 첫번째로서 좌표변환행렬의 미분을 다루었으며, 이와 관련하여 좌표계가 정지되어 있지 않고 회전하는 경우에는 동일한 좌표계 일지라도 관측 시점이 다를 경우 엄연히 다른 좌표계로 구분하여 해석해야 함을 강조하였다. 두번째로서 동일한 관측 대상의 운동에 대하여 고정된 좌표계와 회전하는 좌표계에 발을 디디고 각각 관측할 경우, 좌표계의 회전에 의하여 각기 다른 형태로 운동이 관측됨을 살펴보았다. 이와 같은 현상은 코리올리 효과에 기인함을 설명하였으며 이동체 운동의 해석에 코리올리 효과를 정확하게 활용하기 위해서는 변화량에 해당되는 (막대) 벡터, 좌표값, 그리고 연산자의 구분이 명확하게 이루어져야 함을 강조하였다.