

강체의 운동방정식

2013/11/18

한국항공대 이형근

항공기의 제어를 위해서는 항공기의 비행동력학을 잘 이해하고 적절한 제어를 설계하는 것이 필수적이다. 반면, 항공기의 비행동력학은 유체역학, 항공기의 조정면, 중력, 추력, 그리고 양력에 대한 이해를 필요로 하므로 역학과 모델링에 익숙하지 않은 경우 큰 부담이 된다. 본 장과 다음 장에서는 비행동력학의 주요 사항을 쉽게 이해시키기 위하여 강체의 운동방정식과 비행동력학으로 분리하여 설명하고자 한다. 본 장에서는 강체에 적용된 힘에 의하여 발생하는 병진운동 방정식과 강체에 적용된 모멘트에 의하여 발생하는 회전운동 방정식을 연차적으로 설명한다. 본 장의 설명에 있어서는 특히 병진운동에서 질량, 속도, 운동량, 그리고 힘이 미치는 영향이 회전운동에서 회전관성, 각속도, 회전운동량, 그리고 모멘트가 미치는 영향과 유사성을 가짐을 나타내는데 중점을 두었다.

관성좌표계에서 관측한 강체의 병진운동 방정식

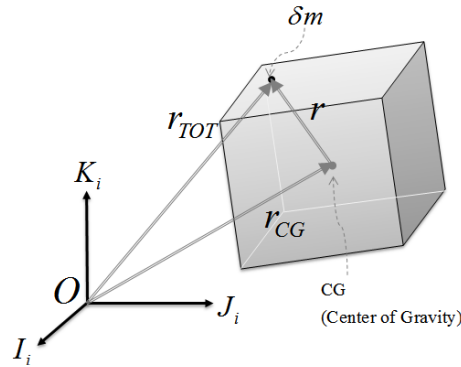


그림 1. 강체의 무게 중심 및 상대 위치

본 절에서는 강체의 외부에서 강체에 힘이 가해질 경우 결과적으로 발생하는 (병진) 운동량의 변화를 관성좌표계에서 관측한 결과를 다루고자 한다. 그림 1에는 임의의 강체를 구성하는 미소질량 δm 의 위치가 관성좌표계에 대하여 표시되어 있다. 관성좌표계는 원점 O 와 세개의 기저벡터 I_i, J_i, K_i 들 로 구성되어 있다. 그림 1에 도시된 바와 같이 강체를 구성하는 미소질량 δm 의 위치벡터는 강체 무게중심의 관성좌표계에 대한 절대 위치벡터와 강체 무게 중심에 대한 미소질량 δm 의 상대 위치벡터로 식 (1)과 같이 분해가 가능하다.

$$r_{TOT} = r_{CG} + r \quad (1)$$

여기서

r_{TOT} : 미소질량 δm 의 절대 위치벡터

r_{CG} : 강체 무게중심의 절대 위치벡터

$r = r_{REL}$: 강체 무게중심으로부터 미소질량 δm 의 상대 위치벡터

관성좌표계에 대한 강체 무게중심의 위치는 다음의 식 (2)에 의하여 정의된다.

$$\Sigma[(r_{TOT} - r_{CG})\delta m] = 0 \quad (2)$$

이로부터 다음의 관계식이 도출될 수 있다

$$\Sigma(r_{TOT} \cdot \delta m) = r_{CG} \Sigma \delta m = m \cdot r_{CG} \Rightarrow r_{CG} = \frac{1}{m} \Sigma(r_{TOT} \cdot \delta m) \quad (3)$$

여기서

$m = \Sigma(\delta m)$: 강체 전체의 무게

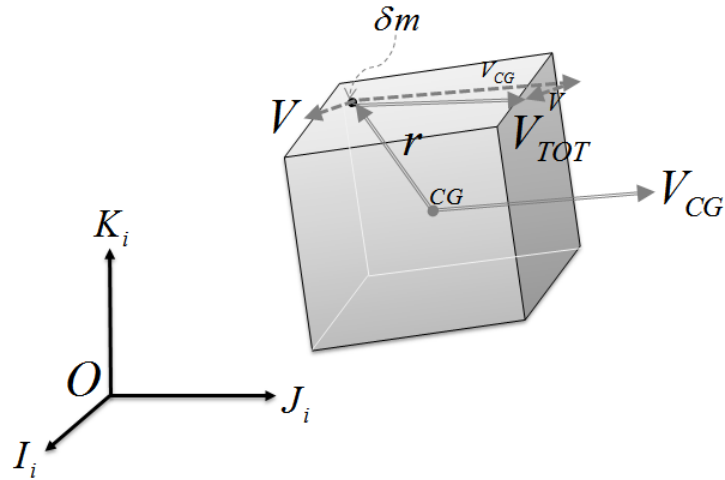


그림 2. 강체에 포함된 미소질량에 작용하는 힘

식 (1)과 식 (2)에 의하여 강체 무게중심에 대한 미소질량의 상대 위치벡터는 다음의 조건식을 만족하게 된다.

$$\Sigma(r \cdot \delta m) = 0 \quad (4)$$

미소질량의 위치벡터와 마찬가지로 미소질량의 속도벡터도 식 (5)와 같이 강체 무게중심의 속도 벡터와 강체 무게중심에 대한 상대 속도벡터로 분해가 가능하다.

$$V_{TOT} = V_{CG} + V \quad (5)$$

여기서

$V_{TOT} = p_i(r_{TOT})$: 미소질량의 속도벡터

$V_{CG} = p_i(r_{CG})$: 강체 무게중심의 속도벡터

$V = V_{REL} = p_i(r)$: 강체 무게중심에 대한 미소질량 δm 의 상대 속도벡터

$p_i(X)$: 관성좌표계에 부착되어 관측한 벡터 X 의 변화율

식 (5)에서 주의할 점은 모든 속도벡터의 관측은 관성좌표계를 기준으로 이루어 졌다는 점이다. 즉, 관성좌표계에 발을 디디고 부착된 관측자의 관점에서 위치의 변화율이 산출된다는 점이다.

강체의 무게중심이 아닌 임의의 위치에 존재하는 미소질량의 속도벡터를 활용하여 강체의 힘 방정식을 유도하기 위해서는 식 (6)에 나타난 운동량(momentum)을 활용하게 된다.

$$\delta P_{TOT} = \delta m \cdot V_{TOT} \quad (6)$$

여기서

δm : 미소 질량(infinitesimal mass)

δP_{TOT} : 미소 질량의 운동량(momentum)

미소질량에 작용하는 힘은 미소질량 운동량의 변화로 나타나므로 이를 활용하면 다음과 같이 각각의 미소질량에 대한 힘 방정식을 얻을 수 있다.

$$\delta F = p_i(\delta P_{TOT}) = p_i(\delta m \cdot V_{TOT}) \quad (7)$$

여기서

δF : 미소 질량에 작용하는 힘(force)

강체 전체의 병진 운동방정식을 유도하기 위해서는 강체 미소질량의 상대 속도벡터 변화율의 합이 영벡터(zero vector)가 되어야 한다. 이를 위해서는 강체 미소질량의 변화율은 어떠한 좌표계에서 관측하여도 영(zero)이라는 다음의 사실을 활용한다.

$$p_i(\delta m) = \left. \frac{d}{dt} \delta m \right|_i = \frac{d}{dt} \delta m = 0 \quad (8)$$

앞서 식 (4)에 의하여 정리된 바와 같이 강체의 질량분포가 변하지 않으므로 이를 식 (8)에 적용하여 미분하면 각 미소질량의 상대속도 질량가중치의 합도 영벡터가 된다는 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} p_i[\Sigma(r \cdot \delta m)] = O &\Rightarrow \Sigma[p_i(r \cdot \delta m)] = O \\ &\Rightarrow \Sigma[p_i(r) \cdot \delta m + r \cdot p_i(\delta m)] = \Sigma[p_i(r) \cdot \delta m] = O \\ &\Rightarrow \Sigma[p_i(r) \cdot \delta m] = O \\ &\Rightarrow \Sigma[V \cdot \delta m] = O \end{aligned} \quad (9)$$

식 (9)에 미분을 한번 더 적용하면 다음의 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} p_i[\Sigma(V \cdot \delta m)] = O &\Rightarrow \Sigma[p_i(V) \cdot \delta m + V \cdot p_i(\delta m)] = O \\ &\Rightarrow \Sigma[p_i(V) \cdot \delta m] = O \end{aligned} \quad (10)$$

식 (10)의 해석에 있어서 주의할 점은 상대속도 가중치의 합이 영벡터가 된다는 결과가 아래의 식 (11)과 식 (12)에 나타난 바와 같이 미소질량 각각의 상대속도가 영벡터가 되는 것을 의미하지는 않는다는 점이다.

$$V \cdot \delta m \neq O \quad (11)$$

$$p_i(V) \delta m \neq O \quad (12)$$

식 (10)에서 얻어진 상대속도 가중치 합이 영벡터가 된다는 결과는 다음과 같이 강체에 가해진 힘에 의하여 발생된 운동량의 변화를 간략화 시켜 준다.

$$\begin{aligned}
 F &= \Sigma(\delta F) = \Sigma[p_i(V_{TOT} \cdot \delta m)] \\
 &= \Sigma[p_i(V_{TOT}) \cdot \delta m] = p_i(V_{CG}) \cdot \Sigma[\delta m] \\
 &= m \cdot p_i(V_{CG})
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

여기서

F : 질량 전체에 가해진 힘

따라서, 지금까지의 결과를 정리하면 강체 전체에 가해진 힘에 의하여 발생하게 되는 병진운동은 식 (14)와 같이 강체의 무게중심의 가속도와 강체 전체의 무게를 곱하여 간단하게 계산할 수 있게 된다.

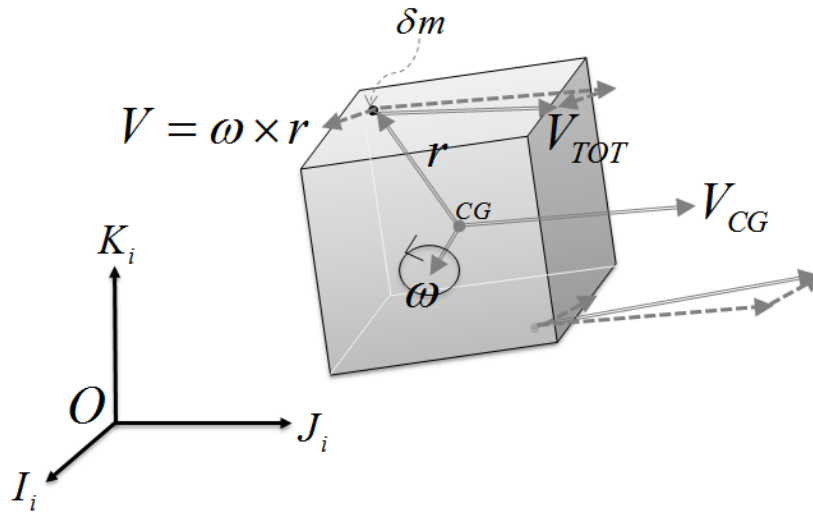
$$F = m \cdot p_i(V_{CG}) = m \cdot a_{CG}
 \tag{14}$$

여기서

a_{CG} : 질량 무게중심의 운동가속도

식 (14)에 도출된 운동방정식은 질량의 변화가 없는 강체의 운동 가속도와 강체에 가해진 힘 사이의 관계를 관성좌표계에서 관측된 변화율에 의하여 설명하여 준다.

관성좌표계에서 관측한 강체의 회전운동 방정식



강체에 힘이 가해지면 (병진) 운동량의 변화가 발생하듯이 강체에 모멘트를 가하게 되면 회전 운동량의 변화가 발생하게 된다. 본 절에서는 관성좌표계에서 관측한 모멘트와 회전운동량의 변화율을 다루고자 한다. 이와 관련된 개형은 그림 x에 도시되어 있다. 먼저, 강체의 무게중심에 대하여 작용하는 미소질량 δm 의 회전운동량(angular momentum) δH 을 정리하면 다음과 같다.

$$\delta H = (r \times V_{TOT}) \delta m \quad (15)$$

여기서

V_{TOT} : 관성좌표계에 부착되어 관측한 미소질량 δm 의 속도벡터

식 (15)의 해석에 있어서 주의할 점은 미소질량 δm 의 회전운동량 δH 의 고려에 있어서 관성좌표계 원점에 대한 위치변화율 V_{TOT} 이 활용되었다는 점이다. 강체에 대하여 외부에서 모멘트가 가해져서 각속도 ω 로 회전하게 되면 강체의 무게중심에 대한 상대 속도 $V = V_{REL}$ 와 미소질량 δm 의 상대 위치벡터 사이에는 다음의 관계가 성립한다.

$$V = \omega \times r \quad (16)$$

여기서

$\omega = \omega_{ib}$: 강체의 회전 각속도 벡터

$r = r_{REL}$: 강체 무게중심으로부터 미소질량 δm 의 상대 위치벡터

$V = p_i(r)$: 관성좌표계 관측 미소질량 δm 의 강체 무게중심에 대한 상대 속도벡터

식 (5), (15), (16)을 결합하면 강체를 구성하는 각 미소질량의 회전운동량을 다음의 관계식에 의하여 구할 수 있다.

$$V_{TOT} = V_{CG} + V = V_{CG} + \omega \times r$$

$$\delta H = [r \times V_{CG} + r \times (\omega \times r)] \delta m \quad (17)$$

식 (17)에 나타난 각 미소질량 δm 의 회전운동량을 강체 전체에 대하여 모두 합하면 강체의 무게중심에 대하여 각속도 ω 로 회전하는 강체 전체의 회전운동량을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$H = \Sigma(\delta H)$$

$$= \Sigma[(r \times V_{CG})\delta m] + \Sigma[r \times (\omega \times r)\delta m]$$

$$= [\Sigma(r\delta m)] \times V_{CG} + \Sigma[r \times (\omega \times r)\delta m] \quad (18)$$

$$= \mathbf{O} + \Sigma[r \times (\omega \times r)\delta m]$$

$$= \Sigma[r \times (\omega \times r)\delta m]$$

회전운동에 있어서 각속도, 회전운동량, 그리고 모멘트는 병진운동에 있어서 속도, 운동량, 그리고 힘과 유사한 역할을 수행한다. 따라서, 외부에서 강체에 가해진 모멘트 M 과 무게중심을 축으로 한 회전운동량의 변화율을 관성좌표계에서 관측할 경우에는 다음의 관계식을 만족하게 된다.

$$M = p_i(H) \quad (19)$$

동체좌표계를 기준으로 표현한 운동방정식

앞선 장에서 설명된 바와 같이 i -좌표계에서 b -좌표계로의 복합 좌표변환행렬은 다음과 같이 구성된다.

$$C_i^b = C_2^b C_1^2 C_i^1 \quad (20)$$

여기서

$$\begin{aligned} C_2^b = C_x(\phi) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \\ C_1^2 = C_y(\theta) &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \\ C_i^1 = C_z(\psi) &= \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

식 (20)과 식 (21)에 의하여 각 행렬들을 곱하고 그 결과를 정리하면 i -좌표계에서 b -좌표계로의 복합 좌표변환행렬은 다음과 같이 구성된다.

$$C_i^b = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (22)$$

위의 단위 좌표변환을 참고하면 동체좌표계에서 표현한 관성좌표계 대비 동체좌표계 회전각속도의 좌표값 ω_{ib}^b 는 오일러각의 변화율과 다음의 관계를 만족하게 된다.

$$\omega_{ib}^b = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = I_{3 \times 3} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2^b \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + C_2^b C_1^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (23)$$

따라서,

$$\omega_{ib}^b = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (24)$$

식 (24)는 각각의 오일러 각 변화율이 i -좌표계에서 b -좌표계로의 변환에서 중간 단계에 나타나는 서로 다른 좌표계에 관련이 되어 있기 때문에 나타난 결과이며 각 오일러각의 회전축이 서로 직교하지 않음을 나타내어 준다.

한편, 앞선 장에서 상세히 설명된 바와 같이 코리올리 효과는 동일한 (막대) 벡터 X 의 운동에 의하여 발생하는 변화율을 관성좌표계에 발을 디딘 관측자와 동체좌표계에 발을 디딘 관측자가 서로 다르게 목격하는 차이점을 설명하여 준다.

$$p_i(X) = p_b(X) + \omega_{ib} \times X \quad (25)$$

여기서

ω_{ab} : a -좌표계에 대한 b -좌표계의 회전각속도 (막대) 벡터

앞선 절에서 병진운동과 회전운동 방정식들을 함께 정리하면 다음과 같다.

$$F = m \cdot p_i(V_{CG})$$

$$M = p_i(H) \quad (26)$$

식 (26)은 앞서 설명된 바와 같이 관성좌표계에서 발을 디디고 강체의 운동을 지켜본 관측자의 관점에서 정리된 것이다. 식 (26)에 코리올리 보상을 적용하여 동체좌표계에서 발을 디디고 관측한 병진 및 회전 운동방정식을 정리하면 다음과 같다.

$$F = m \cdot p_b(V_{CG}) + m \cdot (\omega_{ib} \times V_{CG})$$

$$M = p_b(H) + \omega_{ib} \times H \quad (27)$$

식 (26)과 (27)은 (막대) 벡터 사이의 관계를 나타내며 수치와는 관련이 없는 공간 기하적인 표현이다. 이를 3차원 좌표값으로 수치화하여 병진 및 회전 운동 방정식을 표현하면 다음과 같다.

$$F^b = m \dot{V}_{CG}^b + m (\omega_{ib}^b \times V_{CG}^b) \quad (28)$$

$$M^b = \dot{H}^b + \omega_{ib}^b \times H^b \quad (29)$$

여기서

$\dot{X}^b = (p_b(X))^b$: 동체좌표계에서 관측하고 동체좌표계에서 표현한 변화율 (좌표값)

$$\begin{aligned}
F^b &= [F_x \quad F_y \quad F_z]^T \\
M^b &= [M_x \quad M_y \quad M_z]^T \\
H^b &= [H_x \quad H_y \quad H_z]^T \\
\omega_{ib}^b &= [p \quad q \quad r]^T : \text{동체좌표계에서 표현한 관성좌표계 대비 동체좌표계의} \\
&\quad \text{회전각속도 (좌표값)} \\
V_{CG}^b &= [u \quad v \quad w]^T : \text{동체좌표계에서 표현한 동체의 속도 (좌표값)} \quad (30)
\end{aligned}$$

식 (18)에서 표현된 회전운동량 (막대) 벡터 H 를 식 (30)과 같이 동체좌표계에 대한 회전운동량 좌표값 H^b 로 수치화 하기 위해서는 각 (막대) 벡터를 특정한 좌표계에 연관시켜 주어야 한다. 좌표값의 표현을 동체좌표계에 연관시키면 다음의 관계식이 얻어진다.

$$H^b = \Sigma [r^b \times (\omega_{ib}^b \times r^b) \delta m] \quad (31)$$

여기서

$$r^b = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \omega_{ib}^b = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (32)$$

무게중심을 원점으로 한 동체좌표계를 기준으로 각 미소질량의 위치는 고정되어 있으므로, 식 (32)를 식 (31)에 대입하고 정리하면 다음과 같이 동체좌표계 기준 회전운동량 좌표값을 간략화된 형태로 얻을 수 있다.

$$H^b = J \omega_{ib}^b \quad (33)$$

여기서

$$J = \begin{bmatrix} I_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & I_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & I_z \end{bmatrix} \quad \text{관성텐서 (inertia tensor)}$$

$$\begin{aligned}
I_x &= \Sigma[(y^2 + z^2) \delta m], \\
I_y &= \Sigma[(x^2 + z^2) \delta m] \\
I_z &= \Sigma[(x^2 + y^2) \delta m] \quad : \text{회전관성 (moment of inertia)}
\end{aligned}$$

$$J_{xy} = \Sigma(xy \delta m),$$

$$J_{yz} = \Sigma(yz \delta m)$$

$$J_{xz} = \Sigma(xz \delta m) \quad : \text{관성곱 (product of inertia)} \quad (34)$$

모양이 고정된 강체에 대하여 관성텐서는 고정된 행렬 값이므로 식 (33)을 시간에 대하여 미분하고 식 (29)와 결합하면 다음의 관계를 얻는다.

$$M^b = J \dot{\omega}_{ib}^b + \omega_{ib}^b \times (J \omega_{ib}^b) \quad (35)$$

마지막으로, 항공기의 운동을 다루기 위하여 속도와 각속도를 상태변수로 간주하는 것이 편리하므로 식 (28)과 식 (35)를 변형하여 다음과 같이 운동방정식을 활용하게 된다.

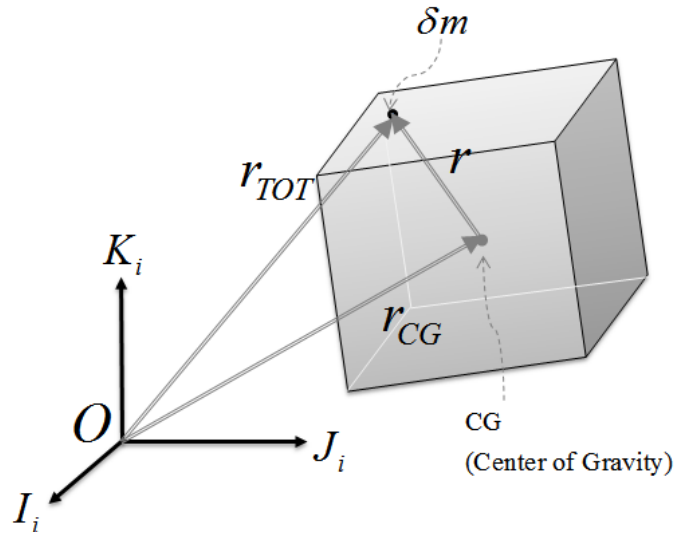
$$\begin{aligned} \dot{V}^b &= \frac{1}{m} F^b - \omega_{ib}^b \times V^b \\ \dot{\omega}_{ib}^b &= J^{-1} \left[M^b - \omega_{ib}^b \times (J \omega_{ib}^b) \right] \end{aligned} \quad (36)$$

식 (36)에서 동체좌표계에 대한 무게중심 속도벡터의 좌표값을 표현함에 있어서 $V^b = V_{CG}^b$ 로 아래첨자를 없애고 표현을 간략화 하였으며 지금부터는 간략화된 속도벡터의 좌표값의 표현에 V^b 를 계속 활용하게 된다.

연 습 문 제

다음의 그림은 강체 무게중심의 절대위치 r_{CG} 와 강체 내부에 임의의 위치에 존재하는 미소 질량 δm 의 절대위치 r_{TOT} 와 상대위치 r 사이의 기하학적 관계를 도시한 것이다. 강체 전체의 무게 m 은 미소질량의 총합으로서 다음의 관계를 만족한다.

$$m = \Sigma(\delta m) : \text{강체 전체의 무게}$$



1. 강체 무게중심의 절대위치 r_{CG} 를 m , r_{TOT} , δm 의 함수로 표현하시오.

2. 다음의 관계가 성립하는 이유를 설명하시오.

$$\Sigma(r \cdot \delta m) = 0$$

3. i -좌표계에서 관측한 벡터 X 의 변화율을 $p_i(X)$ 로 표시할 때 위의 2번 문제는 다음의 결과를 자명하게 증명하여 준다.

$$p_i[\Sigma(r \cdot \delta m)] = 0$$

이로부터 다음의 관계도 성립함을 증명하시오.

$$\Sigma[V \cdot \delta m] = 0$$

여기서

$V = p_i(r)$: 강체 무게중심에 대한 미소질량 δm 의 상대 속도벡터

참고문헌

- [1] L. E. Fogarty, R.M. Howe, *Computer mechanization of six degree-of-freedom flight equations*.
NASA Contractor Report 1344, USA, 1969.
- [2] R. C. Nelson, *Flight Stability and Automatic Control*, McGraw-Hill, 1990