

항공기의 비행동력학

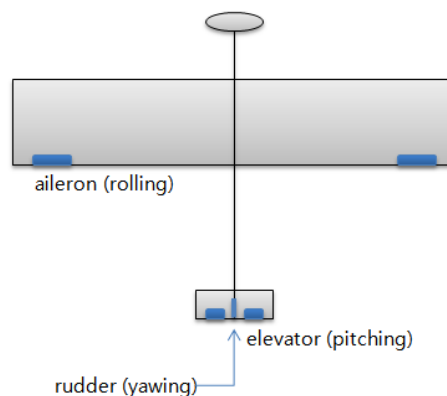
2015/12/01

한국항공대 이형근

앞선 장에서는 강체에 적용된 힘에 의하여 발생하는 병진운동 방정식과 강체에 적용된 모멘트에 의하여 발생하는 회전운동 방정식을 연차적으로 설명하였다. 힘, 뒤틀림, 진동 등의 미세한 사항들을 배제하고 간략화할 경우 항공기 동체도 강체의 한계에 해당된다. 따라서, 앞선 장에서 설명된 강체의 병진 및 회전운동의 원리는 항공기에도 동일하게 적용된다. 반면, 항공기의 비행동력학을 보다 더 자세히 이해하기 위해서는 항공기에 적용되는 중력, 추력, 그리고 양력 등을 이해할 필요가 있으며 나아가서는 항공기의 조종면과 공력계수에 대한 추가적인 이해가 필요하다. 본 장에서는 항공기의 자세와 조종면, 그리고 항공기에 적용되는 힘과 모멘트를 연차적으로 설명하고 이를 앞선 장에서 설명된 강체의 병진 및 회전운동 방정식과 결합하여 항공기의 기본적인 비행동력학(flight dynamics)에 대한 이해를 돕고자 한다.

항공기의 비행자세와 조정면

앞선 장에서 설명된 강체의 병진 및 회전 운동방정식을 기반으로 본 장에서는 기본적인 날개와 조정면을 가진 항공기의 간략화된 모델을 도입하여 운동방정식을 보다 더 상세히 설명하고자 한다. 이를 위해서는 항공기에 간략화된 개형과 조정면(control surface)을 살펴볼 필요가 있다. 그림 1에는 항공기를 조정하기 위한 최소한의 조정면에 해당하는 엘리베이터(elevator), 에일러론(aileron), 그리고 러더(rudder)의 설치 개형이 도시되어 있다. 세계의 기본적인 조정면들 중에서 엘리베이터는 꼬리날개 양단에 두 개가 설치되어 있으며 주로 항공기의 종운동(longitudinal motion)에 해당하는 상승과 하강을 조정하게 된다. 러더는 꼬리날개 중앙에 한 개가 설치되어 주로 항공기의 방향운동(directional movement)을 조정하여 기수각(yaw angle)을 변화시키게 된다. 에일러론은 항공기 주익(main wing)의 양단에 두 개가 설치되어 있으며 각각 교차되는 방향으로 구동되어 항공기의 롤각(roll angle)을 변화시키게 된다. 참고로 에일러론의 조종에 의해서는 종방향과 횡방향 운동이 복합적으로 발생하므로 간단한 항공기의 경우에는 활용하지 않을 수도 있다.



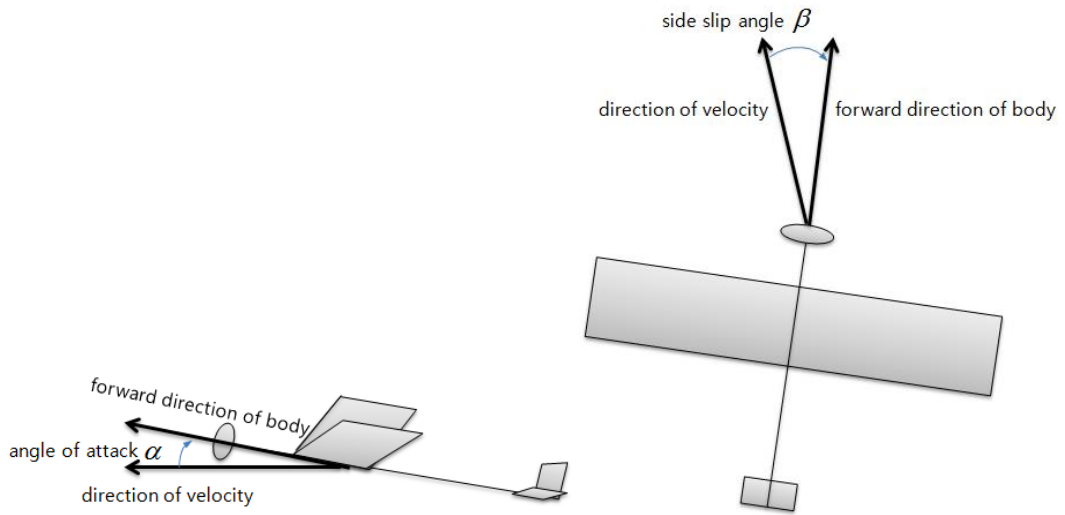


그림 1. 항공기 조종면(control surface), 받음각(angle of attack), 그리고 옆미끄럼각(sideslip angle)의 개형

항공기에 작용하는 힘

본절에서는 강체의 병진 및 회전운동 방정식은 강체에 가해지는 힘과 모멘트가 원인이 되어 각속도와 회전가속도가 발생하는 현상을 기술하고자 한다. 일반적으로 날개를 가진 항공기에 대하여 작용하는 힘은 크게 중력가속도, 양력, 그리고 추력으로 다음과 같이 분리된다.

$$F^b = F_g^b + F_{aero}^b + F_{th}^b$$

여기서

$$F^b = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad (1)$$

중력에 의하여 작용하는 힘은 항공기의 기체가 무게를 가짐으로써 발생하게 되며 이를 더욱 상세히 분해하면 다음과 같다.

$$F_g^b = mC_n^b g^n = \begin{bmatrix} -mg_0 \sin \theta \\ mg_0 \cos \theta \sin \phi \\ mg_0 \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2)$$

여기서

$$g^n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_0 \end{bmatrix}$$

$$g_0 \cong 9.8 \text{ m/sec}^2$$

$$C_n^b = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}$$

(3)

이해의 편의를 위하여 항체의 전체 무게는 무게중심점에 집중되며 지구는 균등한 밀도를 가진 이상적인 구(sphere)의 모양이라 가정하면 식 (2)에 표시된 중력가속도 벡터는 항체의 무게중심에서 지구중심 방향을 지향하게 된다. 기저벡터의 방향이 동체의 전방, 우측날개, 그리고 배꼽방향을 향하는 동체좌표계에 대하여 항체에 가해지는 중력가속도의 좌표값을 산출하면 식 (2)와 같이 지역수평인 항법좌표계로부터 동체좌표계로의 좌표변환행렬 C_n^b 가 영향을 미치게 되며 특히 롤각과 피치각에 영향을 받게 된다.

항공기에 작용하는 추력은 프로펠러나 추진엔진에 의하여 발생하며 주로 항공기 동체의 전방 방향으로 작용하게 된다. 따라서 추력벡터의 좌표값을 동체좌표계에 대하여 최대한 간단하게 표현하면 다음과 같이 모델링 될 수 있다.

$$F_m^b = \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

여기서

T : 추력에 의하여 발생하는 힘

양력은 항공기가 대기 중에 운항함으로써 발생하는 고유의 힘으로써 항공기 날개에 의하여 발생한다. 양력은 크게 대기 속도 V_m (항공기의 속도)과 대기 밀도 ρ 그리고 항공기의 기준면적 S 에 의하여 크게 영향을 받으며 공력계수(aerodynamic coefficient) C_x, C_y, C_z 를 통하여 다음과 같이 항공기의 자세와 조정면에 의하여 그 크기가 조절된다.

$$F_{aero}^b = QS \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} \quad (5)$$

여기서

$$Q = \frac{1}{2} \rho V_m^2 : \text{대기 비행에 의하여 발생하는 동압 (dynamic pressure)} \quad (6)$$

S : 항공기 날개의 기준 면적 (reference area)

ρ : 대기 밀도 (air density)

$V_m \cong \|V\|$: 대기 속도 (air speed) (7)

식 (5)의 우변에 나타난 C_x , C_y , C_z 는 각각 항공기의 전방, 우측날개, 그리고 배꼽 방향에 해당되는 공력계수(aerodynamic coefficient)를 나타내며 항공기의 외관에 의하여 결정된다. 공력계수가 클수록 동일한 동압과 날개 면적에 대하여 큰 양력을 발생시키게 되며 주로 설계된 날개의 형상과 배치에 따라 크게 좌우된다. 식 (6)의 우변에 나타난 대기 속도 V_m 항공기 주변의 대기에 대하여 상대적인 속력을 나타낸다. 만약, 바람이 없이 대기가 정지되어 있는 상황에서는 식 (7)과 같이 지표대비속도 V 의 크기와 일치하게 된다. 반면, 대기가 항공기와 같은 방향으로 이동할 경우에는 대기대비속력 V_m 이 지표대비속력 $\|V\|$ 보다 작게 되며, 대기가 항공기와 반대 방향으로 이동할 경우에는 대기대비속력 V_m 이 지표대비속력 $\|V\|$ 보다 크게 된다.

종방향 공력계수(longitudinal aerodynamic coefficient)에 해당되는 C_x 와 C_y 는 그림 1의 하단 좌측에 도시된 받음각 α 에 의하여 수직 및 수평 방향 공력계수 C_L 과 C_D 로 다음과 같이 분해된다.

$$\begin{bmatrix} C_x \\ C_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ -\cos \alpha & -\sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_L \\ C_D \end{bmatrix} \quad (8)$$

여기서

α : 받음각 (angle of attack)

항공기의 받음각 α 는 항공기의 전진방향에 대한 항공기 동체의 전방방향의 수직방향 각도를 나타낸다. 식 (8)에 나타난 바와 같이 동체의 전방방향과 배꼽방향에 대하여 받음각 α 에 의하여 항공기의 종방향(longitudinal direction) 운동에 영향을 미치는 리프트(lift)와 드랙(drag) 계수 C_L 과 C_D 는 각각 수직 상단 방향과 지역수평 후방 방향으로 작용하게 된다. 식 (8)에서 항공기의 리프트와 드랙 공력계수는 다음과 같이 정리된다.

$$C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha + C_{L_{\delta e}} \delta e + \frac{c}{2V_m} (C_{L_q} q) : \text{리프트(lift) 공력계수} \quad (9)$$

$$C_D = C_{D_0} + C_{D_{\delta r}} \delta r + C_{D_{\delta e}} \delta e + C_D^2 \frac{1}{\pi e AR} : \text{드랙(drag) 공력계수} \quad (10)$$

여기서

δe : 엘리베이터(elevator) 조종면 각도

δr : 러더(rudder) 조종면 각도

q : 항공기 Y-축 방향 각속도

e : 효율계수 (efficiency factor)

$AR = \frac{b}{c}$: 날개의 가로세로비 (aspect ratio)

b : 날개의 횡단 폭 (wing span length)

c : 날개의 종단 길이 (wing cord length)

식 (9)와 (10)에 활용된 날개의 횡단 폭 b , 종단 길이 c , 그리고 가로세로비(aspect ratio) AR 을 가장 간단한 사각형 모양의 주 날개에 대하여 도시한 개형은 **그림 2**와 같다. 효율계수(efficiency factor) e 는 항력에 관련된 값으로 1.0 보다 작은 값을 가진다. 일반적으로 타원형 날개의 효율계수는 1.0 에 가까운 값을 그리고 사각형의 날개의 효율계수는 0.7 내외의 값을 가진다.

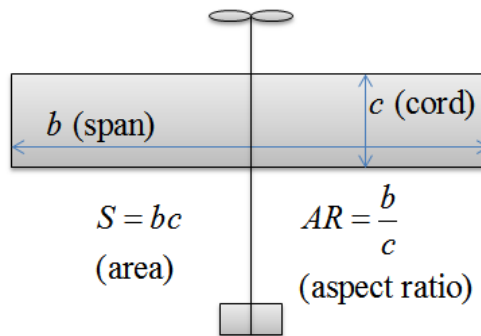


그림 2. 항공기 날개와 관련 계수의 개형

식 (9)와 (10)에 의하여 정리된 종방향 공력계수의 관계식은 항공기의 동역학 이해를 위하여 필요한 최소한의 변수만을 활용하여 간략화된 것이며 일반적으로는 더욱 복잡한 관계식이 활용된다.

항공기의 받음각 α , 엘리베이터 조종면 δe , 그리고 항체의 우측 날개 방향을 축으로 한 각속도 q 에 영향을 받는 종방향 공력계수에 대비하여 횡방향 공력계수는 다음과 같이 옆미끄럼각 β , 러더 조종면 δr , 그리고 항체의 전방 및 배꼽방향을 축으로 한 각속도 p 와 r 에 영향을 받게 된다.

$$C_Y = C_{Y_\beta} \beta + C_{Y_{\delta r}} \delta r + \frac{b}{2V_m} (C_{Y_p} p + C_{Y_r} r) \quad (11)$$

여기서

β : 옆미끄럼각(sideslip angle)

q : 항공기 X-축 방향 각속도

r : 항공기 Z-축 방향 각속도

식 (11)에서 옆미끄럼각은 그림 1의 하단 우측에 도시된 바와 같이 항공기의 전진방향에 대한 항공기 동체의 전방방향의 수평방향 각도를 나타낸다.

지금까지 설명된 수직 및 수평방향 양력에 의하여 작용하는 힘을 종합하여 벡터식으로 정리하면 다음과 같다.

$$F_{aero}^b = QS \begin{bmatrix} C_X \\ C_Y \\ C_Z \end{bmatrix} = QS \begin{bmatrix} \sin \alpha & 0 & -\cos \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_L \\ C_Y \\ C_D \end{bmatrix} \quad (12)$$

여기서

$$C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha + C_{L_{\delta e}} \delta e + \frac{c}{2V_m} (C_{L_q} q)$$

$$C_Y = C_{Y_\beta} \beta + C_{Y_{\delta r}} \delta r + \frac{b}{2V_m} (C_{Y_p} p + C_{Y_r} r) \quad (13)$$

$$C_D = C_{D_0} + C_{D_{\delta r}} \delta r + C_{D_{\delta e}} \delta e + C_L^2 \frac{1}{\pi e AR}$$

항공기에 작용하는 모멘트

앞선 절에서는항공기의 병진운동을 발생시키는 힘을 살펴 보았다. 이에 추가하여 본 절에서는 항공기의 회전운동을 발생시키는 모멘트에 대하여 살펴보고자 한다. 중력, 추력, 그리고 양력의 세 힘이 모두 영향을 미치는 병진운동에 비하여 회전운동은 중력과 추력의 영향을 크게 받지 않고 주로 양력의 영향을 받게 된다. 양력은 주익의 중심으로부터 양력이 작용하는 중심점과의 거리에 의하여 영향을 받게 된다.항체에 작용하는 모멘트를 벡터식으로 정리하여 표현하면 다음과 같다.

$$M^b = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = QS \begin{bmatrix} bC_l \\ cC_m \\ bC_n \end{bmatrix} \quad (14)$$

여기서

$S = bc$: 날개의 넓이 (그림 2 참조)

b : 날개의 횡단 폭(wing span)

c : 날개의 종단 길이(wing cord)

식 (14)에 표시된 모멘트와 관련된 공력계수는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} C_l &= C_{l_\beta} \beta + C_{l_{\delta a}} \delta a + C_{l_{\delta r}} \delta r + \frac{b}{2V_m} (C_{l_p} p + C_{l_r} r) \\ C_m &= C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_{\delta e}} \delta e + \frac{c}{2V_m} (C_{m_q} q + C_{m_{\dot{\alpha}}} \dot{\alpha}) \\ C_n &= C_{n_\beta} \beta + C_{n_{\delta a}} \delta a + C_{n_{\delta r}} \delta r + \frac{b}{2V_m} (C_{n_p} p + C_{n_r} r) \end{aligned} \quad (15)$$

여기서

δa : 에일러론(aileron) 조종면 각도

$\dot{\alpha}$: 받음각(angle of attack)의 변화율

식 (14)와 (15)에 나타난 바와 같이 항체의 전방 및 배꼽 방향을 축으로 한 회전을 발생시키는 모

멘트는 그림 2에 도시된 주익의 횡단 폭(wing span) b 에 의하여 주로 영향을 받으며 옆미끄럼각 β , 에일러론 및 러더 조종면 δa 와 δr , 그리고 항체의 전방 및 배꼽 방향을 축으로 한 회전각속도 p 와 r 에 의하여 조절된다. 반면, 항체의 우측 날개 방향을 축으로 한 회전을 발생시키는 모멘트는 주익의 종단 길이 (wing cord) c 에 의하여 주로 영향을 받으며 받음각 α , 엘리베이터 조종면 δe , 그리고 항체의 우측 날개 방향을 축으로 한 각속도의 변화율 q 에 의하여 조절된다. 최종적으로, 지금까지 설명된 힘과 모멘트에 의하여 구동되는 항공기의 비행동력학을 동체좌표계에 대한 좌표값으로 표시한 결과는 Appendix A에 정리되어 있다.

비행궤적좌표계에 대한 고려

앞선 절에서 설명된 항공기의 병진운동은 Appendix A에 도시된 바와 같이 동체좌표계에서 표현한 항공기 속도의 미분방정식으로 표현되었다. 반면, 항공기 동체의 전방 방향과 항공기 속도벡터의 방향은 받음각과 옆미끄럼각에 의하여 일치하지 않게 된다. 공기역학(aerodynamics)를 직관적으로 고려하고자 할 경우에는 동체좌표계에 기반한 속도벡터 보다는 항공기의 대기대비속력(airspeed)을 받음각(angle of attack)과 옆미끄럼각(sideslip angle)과 연관지워 고려하는 것이 더욱 편리할 것이다. 이를 위하여 동체좌표계에서 표현한 항공기의 속도 성분과 대기대비 속력 사이의 관계를 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = V_m \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta \\ -\sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad (16)$$

여기서

$$V = V^b = [u \quad v \quad w]^T : \text{동체좌표계에서 표현한 항공기의 속도 성분(좌표값)}$$

$$V_m = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} : \text{항공기의 대기대비속력(air speed)} \quad (17)$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{w}{u}\right) : \text{받음각과 항공기 속도 성분 사이의 관계} \quad (18)$$

$$\beta = -\tan^{-1}\left(\frac{v}{\sqrt{u^2 + w^2}}\right) : \text{옆미끄럼각과 항공기 속도 성분 사이의 관계} \quad (19)$$

식 (16)에서는 간략화를 위하여 대기의 움직임이 없는 경우를 가정하였다. 이 경우 대기의 속도 V_{wind} 는 영벡터가 되므로 대기대비속력(air speed) V_m 은 동체좌표계로 표현한 지표대비속도(earth-referenced velocity) V 의 크기와 일치하게 된다. 이를 활용하여 지금부터는 대기대비속력의 변화율을 구해보고자 한다. 먼저, 앞선 장에서 동체좌표계를 기준으로 한 항공기의 속도는 다음의 미분방정식을 만족함을 확인하였다.

$$\dot{V}^b = -\omega_{ib}^b \times V^b + \frac{1}{m} F^b \quad (20)$$

이로부터 피타고라스의 정리를 적용하고 미분을 적용하면 다음의 관계를 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 V_m^2 &= u^2 + v^2 + w^2 \\
 \Rightarrow \dot{V}_m &= \frac{u}{V_m} \dot{u} + \frac{v}{V_m} \dot{v} + \frac{w}{V_m} \dot{w} \\
 \Rightarrow \dot{V}_m &= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\sin \beta & \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{21}$$

식 (21)을 원래의 병진운동 미분방정식에 해당되는 식 (A-1)에 대입하고 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_m &= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\sin \beta & \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta \\ -\sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix} V_m \\
 &+ \frac{1}{m} \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\sin \beta & \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\sin \beta & \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\sin \alpha \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta & 0 & -\cos \alpha \cos \beta \\ \sin \beta & \cos \alpha \cos \beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} V_m \\
 &+ \frac{1}{m} \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\sin \beta & \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{22}$$

따라서, 대기대비속력의 변화율은 식 (22)로부터 다음과 같이 정리된다.

$$\dot{V}_m = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\sin \beta & \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \tag{23}$$

받음각의 변화율을 계산하기 위해서는 식 (18)에 정리된 받음각과 동체속도 성분 사이의 관계식을 활용한다. 이를 전개하여 정리하면 다음과 같다.

$$\dot{\alpha} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{w}{u}\right)}{1 + \left(\frac{w}{u}\right)^2} = \frac{\frac{u\dot{w} - \dot{u}w}{u^2}}{\frac{u^2 + w^2}{u^2}} = \frac{u\dot{w} - \dot{u}w}{u^2 + w^2}$$

$$u^2 + w^2 = V_m^2 - v^2 = V_m^2 - V_m^2 \sin^2 \beta = V_m^2 \cos^2 \beta \quad (24)$$

$$\Rightarrow \dot{\alpha} = \frac{\dot{w} \cos \alpha - \dot{u} \sin \alpha}{V_m \cos \beta}$$

$$\Rightarrow \dot{\alpha} = \frac{1}{V_m \cos \beta} \begin{bmatrix} -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix}$$

식 (24)을 원래의 병진운동 미분방정식 (A-1)에 대입하고 전개하면 다음과 같다.

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{\cos \beta} \begin{bmatrix} -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta \\ -\sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{mV_m \cos \beta} \begin{bmatrix} -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$= \frac{1}{\cos \beta} \begin{bmatrix} -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\sin \alpha \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta & 0 & -\cos \alpha \cos \beta \\ \sin \beta & \cos \alpha \cos \beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{mV_m \cos \beta} \begin{bmatrix} -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$$

식 (25)로부터 받음각의 변화율을 간략화하면 다음과 같이 정리된다.

$$\dot{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \tan \beta & 1 & \sin \alpha \tan \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{mV_m \cos \beta} \begin{bmatrix} -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad (26)$$

옆미끄럼각의 변화율을 계산하기 위해서는 식 (19)에 정리된 옆미끄럼각과 동체속도 성분 사이의 관계식을 활용한다. 이를 전개하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\dot{\beta} &= -\frac{d\left(\frac{v}{\sqrt{u^2+w^2}}\right)}{1+\frac{v^2}{u^2+w^2}} = -\frac{\dot{v}(u^2+w^2)^{1/2}-\frac{1}{2}(u^2+w^2)^{-1/2}2(u\dot{u}+w\dot{w})v}{\frac{u^2+w^2}{u^2+v^2+w^2}} \\ &= -\frac{\dot{v}(u^2+w^2)^{1/2}-(u^2+w^2)^{-1/2}(u\dot{u}+w\dot{w})v}{V_m^2} \\ &= \frac{-\dot{v}(u^2+w^2)+v(u\dot{u}+w\dot{w})}{V_m^2\sqrt{u^2+w^2}}\end{aligned}$$

$$-(u^2+w^2) = -V_m^2 \cos^2 \beta$$

$$uv = -V_m^2 \sin \beta \cos \beta \cos \alpha$$

$$vw = -V_m^2 \sin \beta \cos \beta \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \dot{\beta} = \frac{1}{V_m} \begin{bmatrix} -\cos \alpha \sin \beta & -\cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (27)$$

식 (27)을 원래의 병진운동 미분방정식 (A-1)에 대입하고 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\dot{\beta} &= \begin{bmatrix} -\cos \alpha \sin \beta & -\cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta \\ -\sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \\
&+ \frac{1}{mV_m} \begin{bmatrix} -\cos \alpha \sin \beta & -\cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\cos \alpha \sin \beta & -\cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\sin \alpha \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta & 0 & -\cos \alpha \cos \beta \\ \sin \beta & \cos \alpha \cos \beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \\
&+ \frac{1}{mV_m} \begin{bmatrix} -\cos \alpha \sin \beta & -\cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{28}$$

식 (28)로부터 받음각의 변화율을 간략화하면 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned}
\dot{\beta} &= \begin{bmatrix} -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \\
&+ \frac{1}{mV_m} \begin{bmatrix} -\cos \alpha \sin \beta & -\cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{29}$$

최종적으로, 지금까지 설명된 대기대비 속력, 받음각, 그리고 옆미끄럼각의 변화율과 기존의 회전운동방정식을 결합하여 정리하면 비행궤적좌표계에 대한 항공기의 비행동력학을 얻을 수 있으며 그 결과는 Appendix B 에 정리되어 있다.

Appendix A : 동체좌표계를 기준으로 한 비행동역학

$$\dot{V}^b = \frac{1}{m} F^b - \omega_{ib}^b \times V^b \quad (A-1)$$

$$\dot{\omega}_{ib}^b = J^{-1} [M^b - \omega_{ib}^b \times (J \omega_{ib}^b)] \quad (A-2)$$

여기서

$$V^b = [u \quad v \quad w]^T : \text{동체좌표계 기반 동체의 속도} \quad (A-3)$$

$$\omega_{ib}^b = [p \quad q \quad r]^T : \text{동체좌표계 기반 동체의 회전각속도} \quad (A-4)$$

$$F^b = F_g^b + F_{aero}^b + F_{th}^b \quad (A-5)$$

$$F^b = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}, \quad F_g^b = \begin{bmatrix} -mg_0 \sin \theta \\ mg_0 \cos \theta \sin \phi \\ mg_0 \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}, \quad F_{th}^b = \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (A-6)$$

$$F_{aero}^b = QS \begin{bmatrix} \sin \alpha & 0 & -\cos \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_L \\ C_Y \\ C_D \end{bmatrix}, \quad (A-7)$$

$$C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha + C_{L_{\delta e}} \delta e + \frac{c}{2V_m} C_{L_q} q \quad (A-8)$$

$$C_Y = C_{Y_\beta} \beta + C_{Y_{\delta r}} \delta r + \frac{b}{2V_m} (C_{Y_p} p + C_{Y_r} r) \quad (A-9)$$

$$C_D = C_{D_0} + C_{D_{\delta r}} \delta r + C_{D_{\delta e}} \delta e + C_L^2 \frac{1}{\pi e AR} \quad (A-10)$$

$$J = \begin{bmatrix} I_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & I_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & I_z \end{bmatrix} \quad (A-11)$$

$$M^b = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = QS \begin{bmatrix} bC_l \\ cC_m \\ bC_n \end{bmatrix} \quad (A-12)$$

$$C_l = C_{l_\beta} \beta + C_{l_{\delta a}} \delta a + C_{l_{\delta r}} \delta r + \frac{b}{2V_m} (C_{l_p} p + C_{l_r} r) \quad (\text{A-13})$$

$$C_m = C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_{\delta e}} \delta e + \frac{c}{2V_m} (C_{m_\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + C_{m_q} q) \quad (\text{A-14})$$

$$C_n = C_{n_\beta} \beta + C_{n_{\delta a}} \delta a + C_{n_{\delta r}} \delta r + \frac{b}{2V_m} (C_{n_p} p + C_{n_r} r) \quad (\text{A-15})$$

Appendix B : 비행궤적좌표계를 고려한 비행동력학

$$\dot{V}^{traj} = T_F F^b + T_\omega \dot{\omega}_{ib}^b$$

$$\dot{\omega}_{ib}^b = J^{-1} [M^b - \dot{\omega}_{ib}^b \times (J \omega_{ib}^b)]$$

여기서

$$V^{traj} = \begin{bmatrix} V_m \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, T_\omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cos \alpha \tan \beta & 1 & \sin \alpha \tan \beta \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}, T_F = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\sin \beta & \sin \alpha \cos \beta \\ \frac{-\sin \alpha}{V_m \cos \beta} & 0 & \frac{\cos \alpha}{V_m \cos \beta} \\ \frac{\cos \alpha \sin \beta}{V_m} & \frac{\cos \beta}{V_m} & \frac{\sin \alpha \sin \beta}{V_m} \end{bmatrix}$$

$$F^b = F_g^b + F_{aero}^b + F_{th}^b$$

$$F^b = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}, F_g^b = \begin{bmatrix} -mg_0 \sin \theta \\ mg_0 \cos \theta \sin \phi \\ mg_0 \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}, F_{th}^b = \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{aero}^b = QS \begin{bmatrix} \sin \alpha & 0 & -\cos \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_L \\ C_Y \\ C_D \end{bmatrix},$$

$$C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha + C_{L_{\delta e}} \delta e + \frac{c}{2V_m} C_{L_q} q$$

$$C_Y = C_{Y_\beta} \beta + C_{Y_{\delta r}} \delta r + \frac{b}{2V_m} (C_{Y_p} p + C_{Y_r} r)$$

$$C_D = C_{D_0} + C_{L_{\delta r}} \delta r + C_{L_{\delta e}} \delta e + C_L^2 \frac{1}{\pi e AR}$$

$\omega_{ib}^b = [p \quad q \quad r]^T$: 동체좌표계 기반 동체의 회전각속도

$$J = \begin{bmatrix} I_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & I_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & I_z \end{bmatrix}$$

$$M^b = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = QS \begin{bmatrix} bC_l \\ cC_m \\ bC_n \end{bmatrix}$$

$$C_l = C_{l_\beta} \beta + C_{l_{\delta a}} \delta a + C_{l_{\delta r}} \delta r + \frac{b}{2V_m} (C_{l_p} p + C_{l_r} r)$$

$$C_m = C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{l_{\delta e}} \delta e + \frac{c}{2V_m} (C_{m_\alpha} \dot{\alpha} + C_{m_q} q)$$

$$C_n = C_{n_\beta} \beta + C_{n_{\delta a}} \delta a + C_{n_{\delta r}} \delta r + \frac{b}{2V_m} (C_{n_p} p + C_{n_r} r)$$

참고문헌

- [1] L.E.Fogarty, R.M. Howe, *Computer mechanization of six degree-of-freedom flight equations*.
NASA Contractor Report 1344, USA, 1969.
- [2] R. C. Nelson, *Flight Stability and Automatic Control*, McGraw-Hill, 1990
- [3] M. Rauw, *FDC 1.2 – A Simulink Toolbox for Flight Dynamics and Control Analysis*, 2nd edition,
May 10, 2001.