

## 중력장 가속도, 중력 가속도, 그리고 가속도계 측정값 사이의 관계

이형근

한국항공대학교 항공전자및정보통신공학부

물체의 운동을 측정하기 위하여 관성 센서(inertial sensor)에 대한 배경 지식이 없는 사용자가 가속도계(accelerometer)를 사용하고자 할 경우 센서의 이름이 주는 혼동에 의하여 물체의 운동 가속도(acceleration)를 쉽게 얻어낼 수 있으리라 기대하게 된다. 반면, 가속도계가 실제 측정하여 주는 값은 비력 가속도(acceleration due to specific force)에 해당되므로 적절한 처리를 부가하지 않으면 기대한 바와 같이 물체의 운동 가속도를 얻을 수 없다. 가속도계의 측정값으로부터 운동 가속도를 추출하기 위해서는 중력장 가속도 (gravitational acceleration), 중력 가속도 (acceleration due to gravity), 비력 가속도, 그리고 운동 가속도 사이의 관계를 명확하게 구분 이해할 필요가 있다. 본 고에서는 앞선 고들에서 다룬 (막대) 벡터, 좌표값, 좌표계, 좌표변환행렬, 그리고 코리올리 효과 등의 개념을 확장하여 다양한 개념의 가속도들을 구분 설명하였다.

## 1. 중력장 가속도(gravitational acceleration)

뉴턴의 만유인력의 법칙에 의하여 질량을 가진 두 물체 사이에는 다음과 같은 힘이 서로 끌어 당기는 방향으로 작용한다고 알려져 있다.

$$F_{ab} = -G \frac{M_a M_b}{\|R_{ab}\|^3} R_{ab} \quad : \text{중력장 인력(gravitational force)} \quad (1)$$

여기서

$$G = 6.67428 \times 10^{-11} \text{ (m}^3\text{kg}^{-1}\text{sec}^{-2}\text{)} : \text{뉴턴 상수(Newton's constant)}$$

$R$ : 두 물체 사이의 거리

만약, 두 물체 중 하나를 그림 1에 나타난 바와 같이 지구(earth)라 가정하고 나머지 하나를 임의의 물체라 가정하면, 두 물체 사이에 작용하는 인력은 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$F = -G \frac{M_e M_b}{\|R\|^3} R \quad (2)$$

여기서

$$M_e = 5.9742 \times 10^{24} \text{ (kg)} : \text{지구의 질량}$$

$R$ : 지구와 단위 질량 물체 사이의 거리

식 (2)에서 뉴턴 상수와 지구의 질량은 알려진 값이므로 이를 함께 상수  $\mu$  로 묶으면 다음과 같이 표현된다.

$$F = -\mu \frac{M_b}{\|R\|^3} R \quad (3)$$

여기서

$$\mu = G M_e \quad (4)$$

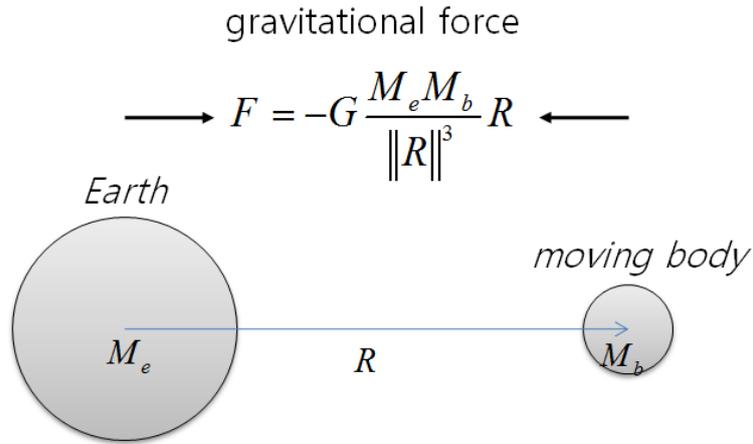


그림 1. 중력장 인력 (만유인력)의 개형

힘의 크기를 나타내는 식 (3)의 벡터식을 가속도에 관련된 벡터식으로 표현하기 위하여 그림 1에 나타난 물체의 질량을 단위 질량으로 가정하면 다음과 같이 중력장 가속도  $\Gamma$ 에 관한 식이 도출된다.

$$\Gamma = -\frac{\mu}{\|R\|^3} R \quad : \text{중력장 가속도(gravitational acceleration)} \quad (5)$$

식 (5)에 표현된 3차원 벡터 중력장 가속도는 다음과 같이 스칼라 량에 해당되는 중력장 포텐셜(gravitational potential)을 활용하여 보다 효율적 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Gamma &= -\nabla U \\ &= -\left[ \frac{\partial U}{\partial x} \quad \frac{\partial U}{\partial y} \quad \frac{\partial U}{\partial z} \right]^T \\ U &= -\frac{\mu}{r}, \quad r = \|R\| \end{aligned} \quad (6)$$

식 (6)에 의하면 중력장 가속도는 중력장 포텐셜의 3축 방향 기울기에 해당됨을 알 수 있다.

지금까지는 중력장 가속도와 포텐셜에 대한 관계를 지구의 외관이 이상적인 구형 (spherical shape)이며 밀도가 균일하게 분포되어 있다는 가정 하에서 살펴 보았다. 반면,

지구가 다양한 밀도 분포를 내포하는 비대칭 입체에 해당되는 관계로, 실제적인 중력장 가속도와 포텐셜은 다소 복잡한 개형을 가진다. 인공위성 탐사에 의한 보다 상세한 모델링의 한 예로서 다음을 들 수 있다.

$$U(r, L_c) = -\frac{\mu}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{a}{r} \right)^n P_n(\sin L_c) \right] \quad (7)$$

여기서

$a = 6378137.0 (m)$ : 지구의 장반경 (semi-major axis)

$L_c$ : 대상 물체의 위도 (latitude)

$J_n(x)$ : n-차 Legendre 다항식의 계수 ( $J_1 = J_3 = J_5 = \dots = 0$ )

$P_n(x)$ : n-차 Legendre 다항식

식 (7)에서 n-차 Legendre 다항식은 기저 함수(basis function)의 역할을 수행하며 측정 데이터에 의하여 계수  $\{J_n\}$ 의 값들을 결정하게 된다. Legendre 기저 함수에 대한 몇 가지 예를 도시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x). \end{aligned} \quad (8)$$

식 (7)에 표현된 보다 현실적인 중력장 포텐셜을 활용하여 중력장 가속도를 관성 좌표계에 대하여 도출하면 아래와 같이 정리된다.

$$\Gamma^i(R) = [\Gamma_x \quad \Gamma_y \quad \Gamma_z]^T$$

$$\Gamma_x = \frac{\partial U}{\partial r_x} = -\frac{\mu}{r^2} \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{a}{r} \right)^2 \left[ 5 \left( \frac{r_z}{r} \right)^2 - 1 \right] \\ - \frac{5}{8} J_4 \left( \frac{a}{r} \right)^4 \left[ 63 \left( \frac{r_z}{r} \right)^4 - 42 \left( \frac{r_z}{r} \right)^2 + 3 \right] \end{array} \right\} \frac{r_x}{r} + (\text{error term})$$

$$\Gamma_y = \frac{\partial U}{\partial r_y} = -\frac{\mu}{r^2} \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{a}{r} \right)^2 \left[ 5 \left( \frac{r_z}{r} \right)^2 - 1 \right] \\ - \frac{5}{8} J_4 \left( \frac{a}{r} \right)^4 \left[ 63 \left( \frac{r_z}{r} \right)^4 - 42 \left( \frac{r_z}{r} \right)^2 + 3 \right] \end{array} \right\} \frac{r_y}{r} + (\text{error term})$$

$$\Gamma_z = \frac{\partial U}{\partial r_z} = -\frac{\mu}{r^2} \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{a}{r} \right)^2 \left[ 5 \left( \frac{r_z}{r} \right)^2 - 3 \right] \\ - \frac{5}{8} J_4 \left( \frac{a}{r} \right)^4 \left[ 63 \left( \frac{r_z}{r} \right)^4 - 70 \left( \frac{r_z}{r} \right)^2 + 15 \right] \end{array} \right\} \frac{r_z}{r} + (\text{error term})$$

$$J_2 = (1082.63 \pm 0.01) \times 10^{-6}, \quad J_4 = (-1.60 \pm 0.01) \times 10^{-6} \quad (9)$$

## 2. 비력 가속도(acceleration due to specific force)

비력 가속도는 가속도계에 의하여 측정되는 값으로서 물체의 운동에 있어서 중력 가속도에 대응하여 작용하는 가속도를 지칭한다. 비력의 측정 원리는 그림 2에 간략하게 도시된 가속도계 내부 스프링 댐퍼(spring damper)의 변위로 설명이 가능하다. 그림 2는 가속도계에 외력이 가해지지 않고 댐퍼가 정지한 상황에서의 위치를 점선으로 표시하였으며, 외력에 의하여 변화된 위치를 실선으로 표시하였다.

그림 2에서 가속도계의 수직 방향으로 외력이 가해지지 않는 상황은 가속도계가 자유 낙하하는 경우에 해당되며, 이 경우 스프링은 가장 짧은 길이로 수축하게 된다 (점선 표시 댐퍼의 위치). 반면, 가속도계를 지표 상에 정지시킬 경우 스프링의 길이는 질량이 있는 댐

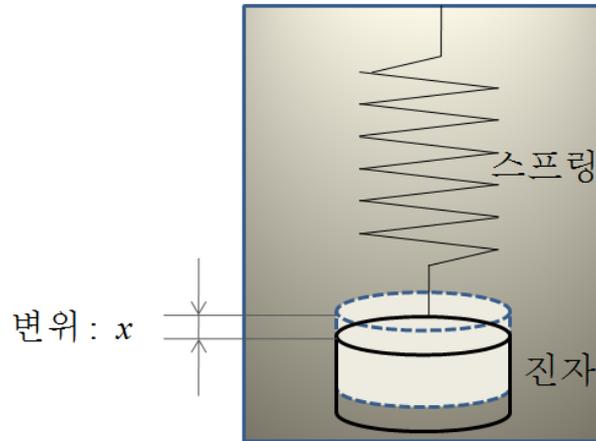


그림 2. 가속도계에 의한 비력의 측정에 활용되는 스프링 댐퍼의 원리

퍼에 가해지는 중력에 의하여 자유 낙하하는 경우보다 늘어나게 된다 (실선 표시 댐퍼의 위치).

그림 2에 도시된 바와 같이 외력  $f$  가 가해지지 않은 상황에서 댐퍼의 위치로부터 외력이 가해진 경우 이동한 댐퍼의 변위 량을  $x$ 로 표시하면 댐퍼의 질량  $m$ 과 스프링 상수  $k$ 에 의하여 댐퍼의 운동은 다음의 관계식을 만족하게 된다.

$$f = m \frac{dx}{dt} + kx \quad (10)$$

참고로, 가속도계 스프링의 방향이 중력 방향과 동일하게 수직 방향인 앞선 경우와는 달리, 스프링의 길이 방향이 중력 방향과 직교하도록 수평 방향을 유지하는 경우에는, 가속도계가 자유 낙하 하거나 지표 상에 정지시키는 경우 모두에 대하여, 스프링의 길이 혹은 댐퍼의 위치는 변함이 없다.

비력 가속도에 대한 개념을 가장 쉽게 이해하기 위해서는 다음의 두 예를 기억하면 되겠다. 첫 번째 예는 정지한 물체에 대하여 3축 가속도계의 한 입력 축이 수직 방향과 일치하도록 설치한 경우에 해당된다. 이 경우, 수직 방향 가속도계 측정치의 크기는 중력장 벡터의

크기와 동일하며 반대 방향에 해당되는 부호로 측정될 것이다. 반면, 수평 방향 두 가속도계의 측정치는 영 값이 된다. 두 번째 예는 3축 가속도계를 설치한 물체를 자유 낙하시키는 경우에 해당된다. 이 경우, 가속도계가 측정한 비력 가속도는 모든 축에 대하여 영 값을 나타낼 것이다.

### 3. 중력 가속도 (acceleration due to gravity) 및 속도 방정식

물체의 운동을 추적하기 위해서는 크게 세 가지의 방법론이 적용 가능하다. 매 시점 물체의 절대 위치 벡터를 측정하는 방법, 알려진 초기 절대 위치 벡터에 대하여 속도 벡터를 적분하여 누적하는 방법, 그리고 알려진 초기 절대 위치 및 속도 벡터에 대하여 가속도 벡터를 적분하여 누적하는 방법이다. 이들 중 첫 번째는 GPS와 같은 전파센서를 활용하는 경우, 두 번째는 encoder와 같은 속도계와 나침반과 같은 방향계를 활용하는 경우, 그리고 세 번째는 자이로와 가속도계를 활용하는 경우에 각각 해당된다. 본 고에서는 이들 중 코리올리 효과와 측정 좌표계의 회전에 의하여 관련된 원리가 가장 복잡한 세 번째 예를 다루고자 한다. 벡터와 좌표계 [1] 그리고 코리올리 효과 [2] 에 대한 상세한 사항은 앞선 고에서 다룬 바 있다.

가속도계를 활용한 운동의 추적을 위하여 다음과 같은 코리올리 방정식을 우선 고려한다.

$$p_i X = p_m X + \omega_{im} \times X = [p_m + \omega_{im} \times] X \quad (11)$$

여기서  $X$  는 임의의 공간 벡터를 나타내며,  $p_i$  와  $p_m$  은 미분 연산자로서  $X$  의 변화를 아래 첨자로 나타낸 좌표계에 발을 디디고 관측하였음을 의미한다. 즉,

$$p_i = \left[ \frac{d}{dt} \right]_i, \quad p_m = \left[ \frac{d}{dt} \right]_m \quad (12)$$

식 (12)에서 운동 관측의 기준으로 활용된  $i$ -좌표계는 회전하지 않는 관성 좌표계(inertial

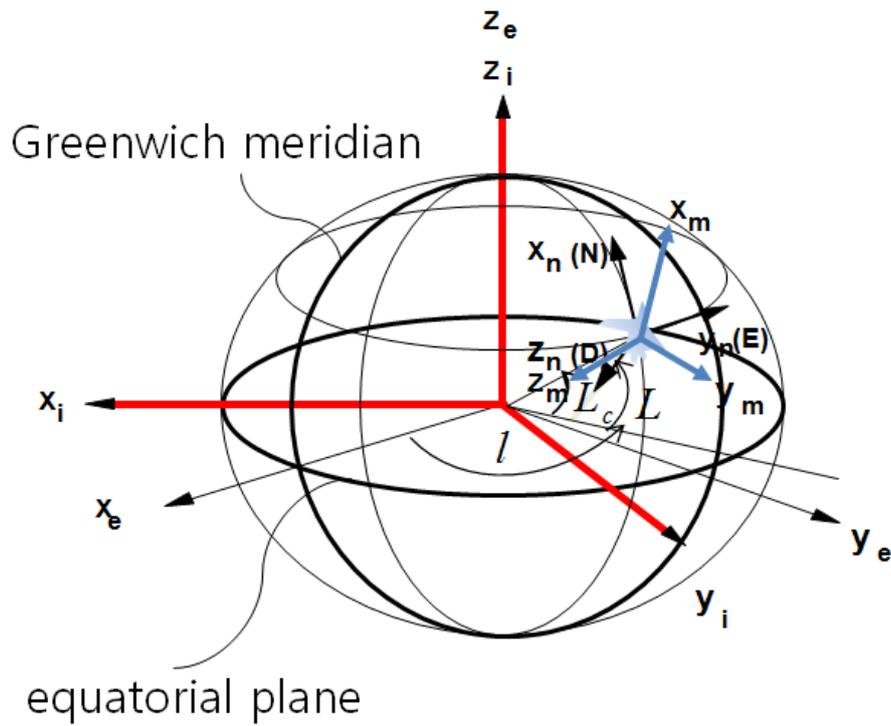


그림 3. 다양한 좌표계의 기저 벡터 개형

frame)를 나타내며  $m$ -좌표계는 이동체에 부착되어 연동 회전하는 운동 좌표계를 각각 나타낸다. 관성 좌표계와 운동 좌표계의 기저벡터들은 그림 3에 도시되어 있다.

식 (11)에 나타난 코리올리 방정식은 미분의 대상이 되는 벡터  $X$ 가 단순한 위치 벡터 뿐 아니라 임의의 변화량 벡터  $p_i R$ 인 경우에도 성립한다. 이를 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$p_i^2 R = p_m(p_i R) + \omega_{im} \times (p_i R). \quad (13)$$

식 (13)에서 속도에 해당되는  $p_i R$ 은 관성공간에 대한 위치 변화율을 나타내므로, 지표에 발을 디디고 관측하는 경우 직관적인 이해에 난점이 있다. 운동에 대한 직관적인 이해를 높이기 위해서는, 운동 속도를 관성 좌표계에 대한 위치 변화율 보다, 그림 3에 도시된 지구

좌표계(Earth-Centered Earth-Fixed frame)에 대한 위치 변화율을 활용하는 것이 보다 더 편리하다. 이를 위하여 코리올리 효과에 기반한 다음의 관계식이 활용된다.

$$p_i R = p_e R + \omega_{ie} \times R \quad (14)$$

여기서  $p_e R$  은 지표에 발을 디딘 관측자에게 관찰되는 물체의 위치 변화율을 나타내며 흔히 지구대비속도(earth-referenced velocity) 혹은 지표대비속도라 지칭된다. 식 (14)를 식 (13)에 대입하고 정리하면 다음의 관계식들이 얻어진다.

$$\begin{aligned} p_i^2 R &= p_m p_e R + p_m (\omega_{ie} \times R) + \omega_{im} \times (p_e R + \omega_{ie} \times R) \\ &= p_m p_e R + (p_m \omega_{ie}) \times R + \omega_{ie} \times (p_m R) \\ &\quad + \omega_{im} \times (p_e R) + \omega_{im} \times (\omega_{ie} \times R) \\ &= p_m p_e R + (p_m \omega_{ie}) \times R + \omega_{ie} \times (p_e R) + \omega_{ie} \times (\omega_{me} \times R) \\ &\quad + \omega_{im} \times (p_e R) + \omega_{im} \times (\omega_{ie} \times R) \end{aligned} \quad (15)$$

식 (15)에 나타난  $\omega_{ie}$  는 지구의 자전 각속도로써 상수 값(constant value)에 해당된다. 따라서, 이에 의하여 다음의 관계식들이 만족된다.

$$\begin{aligned} p_i \omega_{ie} &= O \\ p_m \omega_{ie} &= p_i \omega_{ie} + \omega_{mi} \times \omega_{ie} \\ &= -\omega_{im} \times \omega_{ie} \end{aligned} \quad (16)$$

식 (16)을 식 (15)에 대입하고 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p_i^2 R &= p_m p_e R - (\omega_{im} \times \omega_{ie}) \times R + \omega_{ie} \times (p_e R) + \omega_{ie} \times (\omega_{me} \times R) \\ &\quad + \omega_{im} \times (p_e R) + \omega_{im} \times (\omega_{ie} \times R) \end{aligned} \quad (17)$$

식 (17)의 마지막 항은 다음에 나타난 일반적인 외적 연산자의 관계식을 활용하여 전개 가능하다.

$$\omega_{im} \times (\omega_{ie} \times R) = \omega_{ie} \times (\omega_{im} \times R) + (\omega_{im} \times \omega_{ie}) \times R \quad (18)$$

식 (18)를 식 (17)에 대입하고 정리하면 다음의 관계식이 얻어진다.

$$p_i^2 R = p_m p_e R + \omega_{ie} \times (p_e R) + \omega_{ie} \times (\omega_{me} \times R^m) + \omega_{im} \times (p_e R^m) + \omega_{ie} \times (\omega_{im} \times R) \quad (19)$$

식 (19)의 셋째 항과 다섯째 항은 다음의 관계식을 활용하면 간략화 될 수 있다.

$$\omega_{im} + \omega_{me} = \omega_{ie} \quad (20)$$

식 (20)를 식 (19)에 대입하고 정리하면 다음과 같이 전개된다.

$$p_i^2 R = p_m p_e R + \omega_{ie} \times (p_e R) + \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times R) + \omega_{im} \times (p_e R) \quad (21)$$

$$= p_m p_e R + \omega_{ie} \times p_e R + \omega_{im} \times p_e R + \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times R)$$

$$= p_m p_e R + [(\omega_{ie} \times) + (\omega_{im} \times)] p_e R + \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times R)$$

$$= p_m p_e R + [2(\omega_{ie} \times) + (\omega_{em} \times)] p_e R + \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times R) \quad (22)$$

지금까지의 유도 과정과는 별도로, 물체의 운동 가속도는 그림 4에 도시된 바와 같이 중력장 가속도와 비력 가속도의 벡터 합으로서 다음과 표현할 수 있다.

$$p_i^2 R = f + \Gamma(R) \quad (23)$$

식 (22)와 식 (23)는 동일한 물리량을 표현한 것이므로, 두 식의 비교에 의하여 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} p_m p_e R &= f - [2(\omega_{ie} \times) + (\omega_{em} \times)] p_e R + \Gamma(R) - \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times R) \\ &= f - [2(\omega_{ie} \times) + (\omega_{em} \times)] p_e R + g(R) \end{aligned} \quad (24)$$

여기서  $g(R)$ 은 지역 중력 가속도(acceleration due to local gravity)로서 그림 5에 도시된 바와 같이 중력장 가속도와 원심 가속도(centrifugal acceleration)의 차로 정의된다.

$$g(R) = \Gamma(R) - \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times R) \quad (25)$$

지구대비속도  $p_e R$ 를  $V$ 로 표시하여 식 (24)를 정리하면, 지구대비속도의 미분방정식이 비력 가속도와 중력가속도의 함수로 다음과 같이 최종적으로 얻어진다.

$$p_m V = f - (2\omega_{ie} + \omega_{em}) \times V + g(R) \quad (26)$$

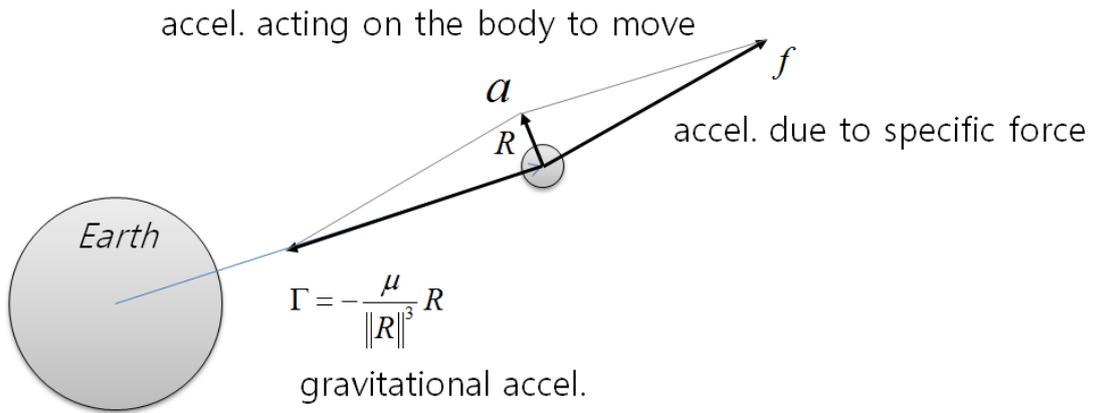


그림 4. 중력장 가속도, 비력 가속도, 그리고 운동 가속도 사이의 관계

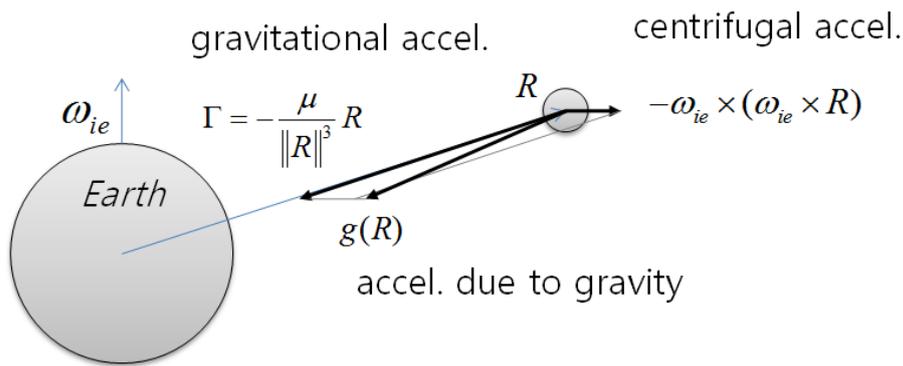


그림 5. 중력장 가속도, 원심 가속도, 그리고 중력 가속도 사이의 관계

식 (26)은 지역수평 관성항법장치(locally-level inertial navigation system)에서 핵심적인 역할을 수행하는 미분 방정식으로서 운동 좌표계를 나타내는  $m$ -좌표계의 자리에는 지역수평 NED 좌표계에 해당되는 항법 좌표계, 항법 좌표계와 유사하게 두 기저벡터가 지역수평면에 존재하지만 일정한 각속도 패턴을 지니고 회전하는 회전 방위각 (wander azimuth) 좌표계, 그리고 지구 좌표계 등이 활용될 수 있다. 이들 중 가장 널리 활용되는 항법 좌표계를 활용하면 식 (26)은 다음과 같이 정리된다.

$$p_n V = f - (2\omega_{ie} + \omega_{en}) \times V + g(R) \quad (27)$$

식 (27)은 (막대) 벡터 식에 해당되므로 각 벡터들 사이의 기하학적 관계를 의미한다. 기하학적 관계를 수치화 하기 위해서는 (막대) 벡터에 대한 좌표값 표현이 필요하다면 이를 위해서는 좌표값 표현의 기준이 되는 좌표계가 추가적으로 도입이 되어야 한다.

참고로, 좌표값 표현의 기준 좌표계와 운동의 변화 량 관측에 발을 디디는 혹은 미분에 대한 기준 좌표계는 확연히 다른 개념이며 이와 관련된 상세한 사항은 앞선 고에 다루어져 있다. 좌표값의 표현에 미분에 활용된 항법 좌표계를 동일하게 활용하면 식 (27)에 의한 막대 벡터 식은 다음과 같이 수치화된 좌표값들 사이의 관계식으로 변환된다.

$$\begin{aligned} \dot{V}^n &= f^n - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times V^n + g^n(R) \\ &= C_b^n f^b - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times V^n + g^n(R) \end{aligned} \quad (28)$$

지구대비속도 여기서  $f^b$  는 가속도계에 의하여 동체 좌표계를 기준으로 측정된 비력 가속도를 의미하며,  $C_b^n$  은 자이로스코프(gyroscope)를 활용하여 계산된 좌표변환행렬을 의미한다.

### 3. 결론

본 고에서는 대표적 관성센서로 활용되는 가속도계의 활용에 있어서 혼동될 수 있는 중력장 가속도, 중력 가속도, 비력 가속도, 그리고 운동 가속도 사이의 차이점을 상세히 다루었다. 이를 위하여 앞선 호들에서 다루어진 (막대) 벡터, 좌표값, 좌표계, 그리고 좌표변환행렬과 관련된 기본적인 개념들이 활용되었으며, 또한 회전하는 좌표계에 발을 디디고 벡터의 운동을 관측할 경우 발생하는 코리올리 효과가 중요한 역할을 수행하였다.

이에 의하여, 중력장 가속도는 지구가 회전하지 않더라도 지구의 큰 질량으로 인하여

주변 물체를 끌어 당기는 가속도에 해당되며, 중력 가속도는 임의의 물체가 지구의 특정 부분과 고정된 상대위치 관계를 가지며 지구와 연동하여 회전하는 경우 중력장 가속도와 지구의 회전에 의한 원심력의 벡터 합력에 해당되며, 비력 가속도는 가속도계가 출력하는 측정값에 해당되고, 마지막으로 운동 가속도는 중력장 가속도와 비력 가속도의 벡터 합력에 해당됨을 설명하였다.

여러 가지 가속도 개념들과 더불어, 지구대비속도, 비력 가속도, 그리고 중력 가속도가 연관되어 관성항법 알고리즘에 있어서 가장 복잡한 부분에 해당되는 속도 방정식이 유도되는 과정이 설명되었다. 저자는 본고에서 다루어진 내용이 관성센서를 처음 활용하고자 하거나 또는 관성항법시스템에 대하여 상세히 활용하고자 하는 독자들에게 유익한 내용이 되기를 기대하며 글을 맺고자 한다.

## 참고문헌

- [1] 이형근, "벡터, 좌표계, 좌표값, 그리고 좌표변환 행렬," 제어로봇시스템학회지, vol. 15, no. 14 겨울호(12월호), pp. 38-42, 2009
- [2] 이형근, "좌표계의 회전과 코리올리 효과" 제어로봇시스템학회지, vol. 16, no. 1 봄호(3월호), pp. 51-55, 2010